

Series in
Applied
Mathematics
and
Mechanics

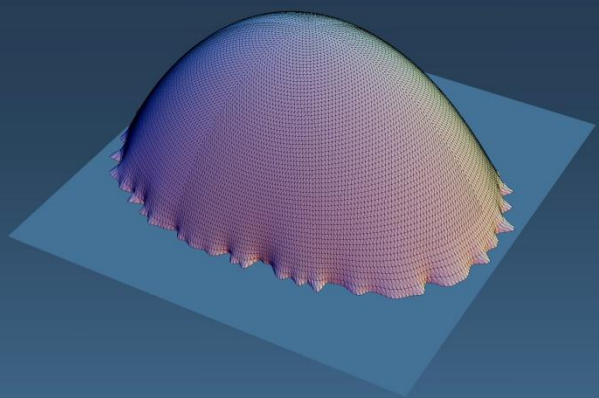


ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА

Vol. 1

Станимир Илиев
Нина Пешева
Димитър Илиев

РАВНОВЕСИЕ И КВАЗИСТАТИЧНА
ДИНАМИКА НА ТЕЧНОСТ,
ЧАСТИЧНО ОМОКРЯЩА
ТВЪРДО ТЯЛО



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Series in
Applied
Mathematics
and
Mechanics



ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА

Vol. 1

**Равновесие и квазистатична
динамика на течност,
частично омокряща
ТВЪРДО ТЯЛО**

Станимир Илиев

Институт по механика - БАН

Нина Пешева

Институт по механика - БАН

Димитър Илиев

*Факултет по математика и информатика,
Софийски университет „Св. Климент Охридски”*



БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ

Series in Applied Mathematics and Mechanics
Volume 1

ISSN: 1314-3034

С. Илиев, Н. Пешева, Д. Илиев

Равновесие и квазистатична динамика на течност, частично омокряща твърдо тяло, Поредица „Приложна Математика и Механика” Том 1, Институт по Механика - БАН, София, 2011, 234 с.

Целта на тази книга е да запознае читателя с вариационния извод на уравненията, описващи статиката и динамиката на трифазна система течност/флуид/твърдо тяло, при отчитане наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл и на дисипация на енергията при движение на контактната линия. Числено е изследвано влиянието на различни възможни реализации на хетерогенност и грапавост на твърдата подложка върху равновесните форми на капка, разположена върху нея. За различни трифазни системи са получени асимптотични и числени решения за движението на течност, при отчитане на дисипацията на енергията при движението на контактната линия. За осъществяване на числените изследвания е разработен вариационен числен метод, даващ възможност да бъдат изследвани съществено тримерни задачи.

Материалът, представен в книгата се основава на разработки на авторите, публикувани в статии в реномирани международни списания.

Рецензенти:

проф. дмн, Запрян Запрянов
проф. дмн, Николай Витанов

© 2011, С. Илиев, Н. Пешева, Д. Илиев
© 2011, Институт по Механика – БАН

Series in
Applied
Mathematics
and
Mechanics



INSTITUTE OF MECHANICS

Vol. 1

Equilibrium and quasi static dynamics of liquid, partialy wetting soilid surface

Stanimir Iliev

Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences

Nina Pesheva

Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences

Dimitar Iliev

Department of Mathematics and Informatics, Sofia University



BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES

Series in Applied Mathematics and Mechanics
Volume 1

ISSN: 1314-3034

S. Iliev, N. Pesheva, D. Iliev

Equilibrium and quasi static dynamics of liquid, partially wetting solid surface, Series in Applied Mathematics and Mechanics, Volume 1, Institute of Mechanics - BAS, Sofia, 2011, 234 pp.

The aim of this book is to acquaint the reader with the variational derivation of the equations, describing the statics and dynamics of the three-phase system liquid/fluid/solid, which takes into account the existence of hysteresis of the equilibrium contact angle and the dissipation of energy when the contact line is moving. The effect of different possible realizations of the heterogeneity and roughness of the solid substrate on the equilibrium shapes of a drop placed on it is studied numerically. The asymptotic and numerical solutions for the liquid motion are obtained for different three-phase systems taking into consideration the energy dissipation occurring when the contact line moves. A variational numerical method is developed for the realization of the numerical studies which allows to treat a real three-dimensional problems.

The material, presented in the book is based on previous studies of the authors published in renowned international journals.

Referees:

Prof. D.Sc. Zapryan Zapryanov

Prof. D.Sc. Nikolay Vitanov

© 2011, S. Iliev, N. Pesheva, D. Iliev

© 2011, Institute of Mechanics, Bulgarian Academy of Sciences

Съдържание

Увод.....	1
Глава 1 Вариационен модел на равновесие на трифазната система течност/флуид/твърдо тяло, отчитащ наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл.....	8
1.1. Условия за равновесие в капилярната теория.....	8
1.2. Причини за несъответствието между уравнението на Юнг и наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл	12
1.3. Термодинамичен подход в моделирането на хистерезиса	15
1.4. Вариационен модел на равновесие	24
1.5. Анализ на модела	27
Глава 2 Модификация на метода на локалните вариации за изследване на равновесието на трифазни системи течност/флуид/твърдо тяло	35
Глава 3 Равновесие на течна капка. Числено изследване.....	50
3.1. Равновесие на течна капка върху наклонена равнина	50
3.2 Равновесие на течна капка върху хоризонтална повърхност	64
Глава 4 Влияние на хетерогенността на твърдата подложка върху равновесните състояния на трифазната система течност/флуид/твърдо тяло в класическия капиларен модел	74
4.1. Особености на задачата	74
4.2. Извод на условията за равновесие на трифазната система: течност / флуид / хетерогенна твърда подложка, на която има резки промени на повърхностното напрежение	78
4.3. Числено изследване на валидността на уравнението на Каси за равновесие на капка върху добре подредена двукомпонентна хетерогенна подложка	82
4.4. Изследване на равновесието на капка върху многокомпонентна хетерогенна подложка	95
4.5. Равновесие на капка върху хетерогенна подложка от успоредни ивици	99
4.6. Равновесие на течност, която е в контакт с вертикална хетерогенна пластина	100
4.7. Равновесие на течна капка върху грапава повърхност	108
Глава 5 Метод за определяне на локалния контактен ъгъл на равновесна капка .	111
5.1. Постановка на проблема.....	111
5.2. Описание на числения метод	113
5.3. Числени примери.....	118
Глава 6 Релаксация на трифазна система течност/газ/твърдо тяло. Вариационен подход	130
6.1. Модели на движението на трифазната контактна линия при малки капилярни числа.....	130
6.2. Вариационен извод на уравненията, описващи движението на течност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия.....	139
Глава 7 Асимптотични решения за квазистатично движение на течност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия	143

7.1. Релаксация на капка върху хоризонтална равнина	143
7.2. Релаксация на контактната линия и на трифазния контактен ъгъл на течност в съд в контакт с вертикална пластина, потопена в съда.....	152
Глава 8 3D числено изследване на квазистационарно движение на течност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия	168
8.1. Особености на задачата	168
8.2. Числен алгоритъм	169
8.3. Релаксация на течна капка върху хоризонтална повърхност	170
8.4. Релаксация на контактната линия при движение на пластина	181
8.5. Динамика на контактната линия при наличие на периодични дефекти с резки граници (Вилхелм геометрия)	192
Допълнение Отчитане на инерцията в модела на дисипация на контактната линия.	
Капилярно-гравитационни вълни.....	202
Д.1. Постановка на проблема	202
Д.2. Числени резултати.....	209
Д.3. Гравитационни вълни.....	214
Литература.....	221

Увод

Течности със свободни повърхности, които са в контакт с твърдо тяло са изключително широко разпространени в обкръжаващия ни свят. Пример за такива системи са чаша с вода, дъждовни капки върху листа на растения (показани по-долу на фотографията) и редица други. Подобни системи са основни елементи на важни технологични устройства (Bertrand *et al.*, 2002). На макро-ниво изследването им представлява интерес, например във връзка с добива на петрол, за ефективното нанасяне на пестициди върху листата на растения, при планиране на оттичането на водата от магистралите, за охлаждането на промишлени реактори и др. Изследването на такива системи предизвиква засилен интерес и на микро-ниво във връзка с развитието на микро- и нано-устройства с течни звена (Tabeling, 2005) - например в микрофлуидиката, при нанопринтере, при мастилено-стуйно принтиране и др.



Дъжд: Капки върху листа на гладиола. (фотография Д. Илиев)

Особеност на изследваната система е наличието на взаимодействие на течността с флуидна фаза и с твърдото тяло, както и на взаимодействие на трите изброени среди, т.е., наличие на трифазно взаимодействие. Моделирането и анализът на системи, в които взаимодействат флуидна и твърда фаза, е сред най-важните и сложни проблеми в механиката на флуидите (Ландау и Лифшиц, 1986). Подобни системи са предмет на интензивни изследвания през целия период на развитие на механиката на непрекъснатите среди. Още по-сложен за теоретично моделиране е случаят, когато в системата има контакт между две флуидни фази и твърдо тяло. Освен появата на

особености, свързани с трифазните взаимодействия, особено важно става отчитането на влиянието на локалната хетерогенност, грапавост и порестост на твърдата повърхност върху поведението на течността. Същественото им влияние се потвърждава от експерименталните данни, които показват силна чувствителност към наличието на примеси и физическото състояние (Blake, 2006).

Може да се направи извод (Ramé *et al.*, 2004), че законите на движението на течността в много ограничен обем, в околност на подвижна контактна линия, се различават от тези, които управляват движението на течността далеч от контактната линия. През последните десетилетия се полагат много усилия за разбиране на законите, определящи поведението в тази област. Движението на контактната линия е отговорно до голяма степен за “омокрящите” свойства на материалите, които са важни за много химични и технологични процеси. С напредъка на изследванията в тази област в инженерните, химическите и физическите науки се свързват стремежите за създаване на материали със зададени характеристики, особено актуални за микро и нанотехнологиите в системи с течна фаза.

Знанието ни за поведението на течността в околност на трифазен контакт са в начален етап (Blake, 2006). Пред теоретичната хидродинамика стои задачата да моделира с методите на механиката на непрекъснатите среди разнообразните повърхностни и междуфазови взаимодействия, действащи на много малки разстояния (de Gennes, 1985; Adamson and Gast, 1997; Israelachvili, 1991) в областта на трифазния контакт и да отчете особеностите на физическото състояние на повърхността. Трябва да се изразят характеристиките на поведението на течността в трифазната област чрез макроскопични, експериментално определяеми величини, като скорост, ъгъл, вискозитет и др.

Проблемът на континуалното моделиране на поведението на трифазни системи флуид/течност/твърдо тяло има два взаимосвързани аспекта: статичен и динамичен. За статиката, основен проблем е да се моделира съпротивлението към преместване на трифазната контактна линия, като проявяващата се задържаща сила да се съгласува с експерименталните данни. За динамиката проблемът е по-комплексен. Използването на модела на Навие-Стокс, с гранично условие за прилепване на течността към твърдото тяло, не е достатъчно сполучливо за разглежданите трифазни задачи. Условието за прилепване, използвано в този модел, не отразява правилно наблюдаваното поведение на трифазната контактна линия. Ако при възможните движения на течността, трифазната контактна линия остава неподвижна, то това условие следва да се използва и при определянето на виртуалните изменения на системата. Чрез изследване на виртуалната работа, свързана с тези виртуални изменения, се определят условията за равновесие на системата. Използването на условието за прилепване на контактната линия води до заключението, че всеки контактен ъгъл от диапазона $0^\circ - 180^\circ$ може да е равновесен. Това противоречи на експерименталните наблюдения. Използването на условието за прилепване не е достатъчно добро и за решаването на уравненията на динамиката, тъй като води до неинтегрируемо безкрайно напрежение на границата с твърдото тяло (Huh and Scriven, 1971). Условието за прилепване не е добро (Hocking, 1976), защото, ако частица от течността веднъж се окаже на повърхността на твърдото тяло, повече не я напуска. Това противоречи, както на експерименталните наблюдения (Dussan V. and Davis, 1974), така и на молекулните предста-

ви за течностите.

Предложени са редица подходи и модели, описващи поведението на течността при наличие на трифазен контакт с твърдо тяло, които се базират на класическата хидродинамика и на капилярната теория (например виж обзорите на Dussan V., 1979; Davis, 1983; de Gennes, 1985; Lipowsky *et al.*, 2005; Blake 2006; Starov *et al.*, 2007; Bonn *et al.*, 2009). Специфичните предположения за поведението на континуалната среда и включването на нови моделни параметри в тези модели доведоха до поставянето отново на дневен ред на редица основни въпроси, свързани със спецификата на континуалното описание на непрекъснатите среди, които продължават да са предмет на дискусии. Сред тях например са: до каква степен на намаляване на мащаба около трифазния контакт са валидни категориите и моделът на хидродинамиката, каква е връзката между деформациите на средата и реалните молекулни движения, какви взаимодействия описва уравнението за равновесния контактен ъгъл на Юнг, за какъв тип твърди повърхности и за какво разстояние от тях се отнася то, как да се включат особеностите на микрорелефа на твърдата повърхност в характеристиките на взаимодействията между фазите, какви физични принципи да се използват вместо условието за прилепване и др.

Използването на основните диференциални хидродинамични и капилярни уравнения предполага използването на редица неявни предположения за възможните движения в системата и за характера на виртуалната работа, свързана с тях. Това ограничава възможностите, както за анализ на споменатата по-горе сложна група от проблеми, свързана с формирането на представи за поведението в трифазната област, така и за адаптация на традиционния хидродинамичен подход към конкретната ситуация. Ние смятаме, че представлява интерес да се получат уравненията, определящи поведението на трифазната система, от най-обща вариационна постановка на задачата. Такава най-обща постановка не е свързана с изисквания за гладкост на функциите, определящи измененията в системата, по-адаптивна е към анализа на множеството компоненти и специфика на виртуалната работа, свързана с тях.

Като метод на теоретичната механика, вариационният подход е показал своята ефективност при описанието на системи с наложени ограничения върху траекториите и върху връзките между елементите. Този подход е ефикасен за задачи от хидродинамиката, в които има контакт с твърди граници. Локалното диференциално описание на поведението на континуалната среда, което доминира в изследванията, затруднява прецизното описание на поведението ѝ в околност на границите с други тела. Алтернатива е вариационният подход, в който се включват крайни енергии, свързани с реалните движения на средата и се отчитат физическите граници на движението ѝ. Заедно с това вариационният подход дава възможност по единен начин да се третира статиката и на динамиката на континуалната среда. Посочените особености на вариационния подход са особено важни при моделиране на процесите на омокряне на повърхности на твърди тела. Заедно с това, при омокрянето на твърди повърхности, силно се проявява влиянието на съществуващата в реалния свят грапавост и хетерогенност на твърдите повърхности. Често преходите между различни части от повърхността са с рязко променящи се свойства, грапавостта също по същество означава отсъствие на гладкост на функцията, определяща формата на твърдата повърхност. В тези случаи виртуалната работа, свързана с виртуалните премествания на флуидните

частици, не е гладка функция, а по частите на повърхността, на които се губи гладкост на характеристиките, флуидът прилепва, и като следствие движенията му също губят гладкост. Използването на най-общите постановки на вариационните принципи за флуидни системи дава възможност да бъдат разгледани и третирани и случаи, когато характеристиките на системата са негладки функции. Реализацията на тази програма е започната от Гибс (Gibbs, 1875-1878) при определянето на критериите за равновесие и устойчивост на хетерогенни системи с течно звено. Особено внимание той отделя на спецификата на “възможните премествания”. Използването на вариационна постановка позволява на Гибс да разграничи случаите, в които виртуалните изменения са обратими и когато те не са, както и случаите, в които равновесие се достига при наличие само на активни сили и случаи, в които присъстват и пасивни сили, и подобни на тях, сили на съпротивления.

В настоящата книга ще приложим подхода на Гибс, като включим във вариационните принципи действието на силите на съпротивление от околността на трифазната граница на системата течност/газ/твърдо тяло. Ще разработим теоретичен континуален модел, отчитащ наличието на крайно големи сили, препятстващи движението на трифазната контактна линия. За този модел ще получим теоретични, асимптотични и числени решения, които ще сравним с налични експериментални данни. Предмет на изследването са две задачи: 1) равновесното състояние на системата и 2) квазистатичното движение на трифазната система, като вниманието е насочено към описанието на движението на трифазната контактна линия.

Задачата за равновесното състояние е класическа и е в основата на формирането на капилярната теория, водеща начало от работите на Юнг и Лаплас. Наличието на крайно големи сили, препятстващи преместването на контактната линия не се оспорва, но моделирането на тяхното влияние е в начален етап. Включването на крайно големи сили, препятстващи движението на контактната линия, е актуално също така и за динамиката, като физическата основа на силите в двата случая, статичен и динамичен, е различен.

Предположението за квазистатичност на движението означава, че свободната повърхност на течността във всеки момент от движението удовлетворява уравнението на Лаплас. Това е приемливо описание за системи, в които движенията са бавни, дисипацията на енергия е съсредоточена в непосредствена околност на трифазната контактна линия и движението на контактната линия е много по-бавно от релаксацията на свободната повърхност към равновесното ѝ състояние. Тези предположения ограничават множеството на възможните динамични системи които могат да бъдат изследвани по този начин, но интересът към изследванията на квазистатични системи остава голям. Това е продиктувано от няколко фактора. Моделирането на поведението на околността на контактната линия в модели, базиращи се на модела на Навие-Стокс (Shikhmurzaev, 1993; 1997) среща сериозни трудности в интерпретацията на моделните предположения. В тази ситуация моделите, имащи място при много малки скорости, спомагат за осъзнаването на физиката на процесите в трифазната област, което от своя страна, може да служи за основа на моделните предположения при големи скорости. Заедно с това, най-последователни и най-много са експерименталните изследвания на трифазната област при много малки скорости (Blake, 2006). Затова и възможностите за сравняване на теоретичните модели с експериментални данни са

най-големи при малки скорости. Освен това, параметрите на континуалните модели при малки скорости са по-малко спрямо тези при големи скорости. Това дава възможност да се анализира по-лесно ефекта от параметрите на движението, свързани с моделирането на поведението непосредствено в контактната област. За квазистатични движения на трифазната система течност/флуид/твърдо тяло са и най-много предложените теоретични модели, най-много теоретични, асимптотични и числени решения са получени в този случай, най-много са сравненията на резултатите с експериментални данни. В книгата ще бъде изследвано включването на крайно голяма сила, препятстваща движението на контактната линия, в квазистатични модели на движение на трифазната система.

В допълнение ще бъде анализирана възможността за включване на крайно голяма сила, препятстваща движението на контактната линия, в модели, не предполагащи квазистатичност. Ще бъде разгледана също така класическата задача за капиллярно-гравитационни вълни на течност в съд. При това разглеждане се предполага, че течността извън околността на трифазната област, може да се опише с модела на идеална течност.

При определяне на условията за равновесие ще отчетем необратимата виртуална работа, свързана с възможното напускане на течността на контактната повърхност с твърдото тяло. Като резултат вместо един равновесен контактен ъгъл ще получим цял интервал от равновесните контактни ъгли. Това явление е известно като хистерезис на равновесния контактен ъгъл.

Ще използваме капиларния модел за получаване на равновесни състояния на системата за случая, когато повърхността на твърдата фаза се състои от няколко материала. Този факт се описва чрез резки промени на повърхностното напрежение. За този случай ще получим ново вариационно условие за равновесие.

Вместо широко използваната досега в литературата вискозна дисипация, за случая на много малък контактен ъгъл $\theta \ll 1$ и в приближение на плоско, паралелно на твърдата повърхност течение на течността, тук дисипацията на енергия ще определим от решението на Moffatt (1964), валидно за произволен контактен ъгъл. Ще изведем чрез вариационния подход на континуалната дисипативна механика уравнението, описващи връзката между дисипацията на енергия в непосредствената околност на трифазния контакт и движението на наблюдаемата контактна линия. Ще получим решения за движението на контактната линия без предположение за много малък контактен ъгъл.

В Гл. 1 на настоящата книга се анализират особеностите на континуалното моделиране на хистерезиса на равновесния контактен ъгъл и се аргументира нова вариационна постановка на условията за равновесие, описващи хистерезиса. Изведено е условието за равновесие на трифазната система: течност/флуид/твърдо тяло, отчитаща наличието на крайна сила, препятстваща придвижването на контактната линия. Получен е ефектът на хистерезис на контактния ъгъл чрез енергия, свързана с виртуално преместване на системата.

В Гл. 2 е разработен ефективен числен алгоритъм, който позволява изследване на 3D модела на равновесие, отчитащ наличието на крайна сила, препятстваща придвижването на контактната линия. Реализирана е крайно-мерна апроксимация на принципа на виртуалната работа за следните системи: течна капка във въздушна сре-

да върху твърда повърхност и течност в отворен съд, в който частично е потопена твърда пластина. Отчитайки, че за класическите задачи от теорията на капиларността, числени тримерни решения са получени за изолирани случаи, разработеният числен алгоритъм може да се използва и за решаване на задачи от капиларната теория, в които твърдата фаза е грапава и хетерогенна. В предлагания метод лесно се включват разнообразни обемни и повърхностни енергии, отчитат се разнообразни ограничения на преместванията на течността.

В Гл. 3 се тества числено дали полученото условие за равновесие описва правилно особеностите на равновесие на капка върху хоризонтална и върху наклонена равнина.

Описанието на съпротивлението към преместване на контактната линия чрез преодоляване на енергийна бариера, актуализира и въпроса как да бъде включено в нея влиянието на грапавостта и хетерогенността на твърдата повърхност. Интерес представлява и по-прецизният анализ на следствията върху равновесното състояние на трифазната система, причинени от наличието на хетерогенност и грапавост.

В Гл. 4 са получени числено решения за 3D-форми на равновесна капка върху хетерогенни и върху грапави подложки в модела на капиларната теория. Експерименталното определяне на физико-химичните параметри на омокрянето върху реални повърхности изисква прецизното определяне на локалните контактни ъгли. Поради това е разработен метод за определянето им чрез достъпни за експериментално наблюдение данни. Изведени са вариационните условия за равновесие при наличие на резки промени в повърхностното напрежение между флуидните фази и твърдото тяло, ситуация типична при твърда подложка, съставена от няколко различни материала. Числено са получени равновесни 3D форми на капка върху хетерогенна подложка при фиксиран обем на капката. Изследвана е валидността на уравнението на Каси и на модифицираното уравнение на Каси, отчитащо наличието на линейно напрежение.

В Гл. 5 е разработен и тестван числен метод, валиден за тримерния случай, за определяне на локалния контактен ъгъл на равновесна капка.

Адаптирането на хидродинамичните модели и на капиларната теория към особеностите на движението в околността на трифазен контакт показва наличието на характерни разстояния до твърдата повърхност, при по-малки от които, детайлното описание е затруднено и валидността на моделите е спорна. Интерес представлява да се съгласува хидродинамичният модел, включващ капиларните явления, с характеристиките на средата от непосредствената околност на контактната линия, в частност на енергийните компоненти между двете области (de Gennes, 1985). Също така е актуално да се развива и тества подходът, базиращ се на връзката между движението на течността, отстояща на определено разстояние от реалния трифазен контакт, и дисипацията на енергия (например вискозна дисипация, дисипация при наличието на флуиден филм, и дисипация, следваща от молекулно-кинетични съображения) в непосредствената околност на твърдата повърхност. В настоящата книга чрез вариационния подход на континуалната дисипативна механика са изведени уравненията, описващи връзката между дисипацията на енергия в непосредствената околност на трифазния контакт и движението на наблюдаемата контактна линия. Анализирани са следствията, до които тези уравнения водят в поведението на системата.

В Гл. 6 са изведени уравненията, описващи квазистатичното движение на теч-

ност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия.

В Гл. 7 са получени асимптотични решения за релаксацията на капка върху хоризонтална равнина и за релаксацията на контактната линия на течност в контакт с вертикална пластина при отчитане на влиянието на различните канали на дисипация на енергия. Анализирани са характеристиките на асимптотичните решения и е направено сравнение с решенията от алтернативни подходи и с резултати от експериментални изследвания.

В Гл. 8 са получени числено решения за квазистатично движение на течност в тримерния случай и е направено сравнение с експериментални изследвания.

В Допълнението е приложен моделът на дисипация на енергия при движение на контактната линия без предположението за квазистатичност на движението на течността.

При писането на изложението на тази книга се е предполагало, че читателят е запознат с теорията на капилярността и с моделите на идеална и вискозна течност (достатъчен е обемът от знания от глави 1, 2, 7 от Ландау и Лифшиц, 1986), с вариационните методи на механиката (например, с Гл. 1-3 от Lanczos, 1970) и че има основни знания от диференциалната геометрия.

Книгата представя резултати, които са получени от авторите. Основните резултати са публикувани в научната литература. Написването на различните глави от книгата се определя от авторството и съавторството на членовете на колектива в публикациите, представящи съответния научен резултат. Съавтор на част от публикациите, резултатите от които са представени в книгата е Вадим Николаев.

Авторите благодарят на проф. Запрян Запрянков, проф. Красимир Данов и проф. Николай Витанов, които внимателно прочетоха ръкописа, направиха много ценни забележки и дадоха важни съвети, които бяха отчетени в крайния вариант на текста.