

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА**

РУМЕН ИВАНОВ БОРИСОВ

**АНАЛИЗ НА ДАННИ ЗА РАЗПРЕДЕЛЕНИ ВЕЛИЧИНИ И
ТРАФИК В МРЕЖОВИ СИСТЕМИ**

АВТОРЕФЕРАТ

**НА ДИСЕРТАЦИЯ ЗА ПРИДОБИВАНЕ НА ОБРАЗОВАТЕЛНАТА И НАУЧНА СТЕПЕН
ДОКТОР**

ПО СПЕЦИАЛНОСТ: 01.01.13 „Математическо моделиране и приложение на математиката“
В ПРОФЕСИОНАЛНО НАПРАВЛЕНИЕ: 4.5. Математика

Научен ръководител
Проф. д.м.н НИКОЛАЙ К. ВИТАНОВ

София, 2021

Дисертационният труд съдържа 158 страници и 32 фигури, оформени във Въведение, три глави, приноси и резултати от дисертацията, списък на публикациите по дисертацията, както и списък на използвана литература с 307 заглавия, всичките на английски език.

Дисертантът е разработил дисертационния си труд като задочен докторант в направление „Механика на флуиди“ към Института по механика на БАН.

Дисертационният труд е докладван и предложен за откриване на процедура за защита на разширен семинар на направление „Механика на флуиди“ към Института по механика на БАН, проведено на:..... г.

Дисертационният труд е одобрен и насочен към публична защита от НС на Института по механика на БАН, състоял се на:..... г., с Протокол No

Защитата на дисертационния труд ще се състои в Института по Механика при БАН, пред Научно жури в състав:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Защитата на дисертацията ще се проведе на:г. от..... часа в зала на Института по механика – БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 4., София.

Материалите по защитата на дисертационния труд са на разположение в канцеларията на Института по механика при БАН, ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 4., София, както и на Интернет страницата на института.

Увод

Мрежите са множество от обекти, всички или част от които са свързани помежду си с някакъв вид връзки. Системите и обектите, които имат подобна структура изобилстват в реалния свят. Примерите са многобройни: Интернет, World Wide Web, социалните мрежи на познанствата или каквито и да е други връзки между индивидите, мрежите на бизнес взаимоотношенията между компаниите, разпределителните мрежи, като кръвоносните съдове или пощенските маршрути, невронните, метаболитните, транспортните и много други мрежи [1–19].

Теорията на мрежите под формата на математическата теория на графите е един от фундаменталните стълбове на дискретната математика. Успоредно с развитието на тази теория започва да се очертават и нейните важни приложения в по-специализиран контекст, като например в областта на социалните науки. Два знакови примера на проучвания, породили теорията на мрежите, каквато я познаваме днес, са тези на известния експеримент на „малкия свят“ на Milgram от 1967 г. [20] и теорията на Granovetter от 1973 г. [21] за разпространението на информация в социалните мрежи. Резултатите от експеримента на Milgram ни помогнаха да разберем колко тясно сме свързани чрез нашите социални връзки, докато теорията на Granovetter подчертава важността на индивидуалните връзки, споделени от индивидите в мрежата. В самия край на двадесети век, две изключително плодотворни статии дават силен тласък в развитието на мрежовата теория. Първата от тях относно мрежи, притежаващи феномена на „малкия свят“ (small-world networks) на Watts и Strogatz [15] се появява в сп. Nature през 1998 г. Година по-късно в сп. Science се публикува втората от тях върху безмашабните мрежи (scale-free networks) от Barabasi и Albert [22].

В много направления на познанието като естествените и социалните науки, популационната динамика и много други [23–29] се прилагат модели на сложни системи. Голяма част от тях успешно се моделират с мрежи, наречени сложни мрежи (complex networks). През последните години теорията на сложните мрежи, разглеждани като нерегулярни структури, сложно и динамично развиващи се във времето, търпи бурно развитие [30–35].

Особен интерес за изследване представлява една от най-важните характеристики на мрежите, а именно тяхната способност да моделират преноса на обекти или информация. Такива са например системи от определени видове движение на вещество или индивиди чрез естествена или социална система. Моделирането на движението на веществото в такива системи е теоретично интересно и със значително практическо значение, тъй като те обикновено са свързани с приложно важни задачи.

Тази тема става особено актуална през 1960 г., след публикуването на книгата на Ford and Fulkerson [36]. В началото задачите, които представляват интерес са например, как минимален брой хора да изпълнят фиксиран график от задачи; задачи за потоци с минимални стойности; или възможния максимален поток в мрежа. В днешно време методологията от теорията за мрежовите потоци [37,38] значително разшири своя обхват и се използва за решаване на множество други задачи: (i) намиране на най-кратък път, (ii) оптимално разположение, на обекти и съоръжения (например летища, училища, складове и др.), (iii) управление на проекти (определяне на минимална продължителност на проекта), (iv) оптимално електронно насочване на маршрута в градските транспортни мрежи [39], (v) самоорганизиращи се мрежови потоци, (vi) моделиране и оптимизиране на скаларните потоци в мрежите [40], (vii) ефекти на памет в мрежови потоци [41], (viii) идентифицирането и количественото определяне на изоформите на РНК в проби [42] и много други [43–49].

I Обща характеристика на дисертацията

Актуалност и мотивиране на темата

Изследванията в дисертацията са логично продължение на изследванията, провеждани в групата на проф. Витанов през последните две десетилетия. Изследванията по механика, диференциални уравнения и теория на мрежите са комбинирани в [50], в която е положена началото на моделирането на движение на субстанции в канали от мрежи. Тези изследвания са продължени в [51–55], като част от тях са обсъдени в текста на дисертацията. Получените резултати са интерпретирани в контекста на моделиране на мигрантски потоци, като съществен момент в така изградения модел е възможността веществото да има предпочитания към върховете на мрежата. С други думи, параметрите, управляващи преноса на вещество да имат възможност да приемат различни стойности за различните върхове на мрежата.

В дисертацията се разглежда специфична задача за потоци в мрежа: движение на вещество през мрежов канал, при наличие на възможност за „изтичането“ му през върховете на канала (загуба на вещество или използване на част от веществото в някакъв процес). Моделът описва движение на вещество в канал, представляващ система от много рамена, включително и безкрайно много, като обобщение на този, описан в [50] (канал с едно рамо). Важна характеристика на изучаваната система е, че веществото може да има предпочитание към някои от върховете на канала (например каналът може да бъде проектиран по такъв начин, че веществото да има тенденция да се концентрира в някои от върховете на мрежата). Това специфично свойство позволява използването на модела за изследване на движения както на животни или хора, така и на всякакви системи от физически обекти, които имат предпочитание към върховете на мрежата. Обсъжданият модел съдържа като частен случай и липсата на предпочитание на веществото по отношение на върховете на канала. Очевидното приложение на модела е при процес на движение на нежива субстанция през канал с използване на част от веществото във върховете на канала за някакъв индустриален процес. Но моделът има много повече приложения, като например моделиране на големи човешки миграционни потоци [50, 53, 55, 56].

Цели на дисертацията

В дисертационния труд е предложен обобщен модел, описващ движението на веществото през клетките на произволен брой рамена от мрежов канал. Математически, моделът е основан на система от обикновени диференциални уравнения. В дисертацията се изследва само стационарния режим на движение на вещество, като важна негова характеристика е възможността при определени условия веществото да се концентрира в определени възли от мрежата.

Поставени са следните цели:

- Изграждане на модел на движение на вещество през канал, който е част от мрежа и е изграден от произволен брой рамена;
- Изучаване на стационарния режим на движение на веществото и получаване на свързаните с това движение вероятностни разпределения;
- Някои възможни приложения на модела и получените от него вероятностни разпределения.

Обща структура на дисертацията

Дисертацията е структурирана както следва:

Глава първа е уводна глава. Направен е обзор на съвременното състояние на изследванията на структурата и динамиката на сложните мрежи. Дадени са някои основни дефиниции от теория на графите, като накратко е разгледана топологията на реалните мрежи и мрежовите модели, създадени за тяхното описание.

Във втора глава е изграден модел на движение на веществото в мрежов канал, съставен от две и от три рамена. Дискутиран е стационарният режим на движение както в канал с крайни, така и в канал с безкрайни рамена. Изведени са няколко нови вероятностни разпределения, свързани със стационарния поток в канала. Показано е, че тези разпределения съдържат като частен случай няколко забележителни разпределения, като разпределенията на Уоринг, Зипф и други.

Обобщение на модела на движение на вещество в канал с произволен брой рамена е направено в глава трета. Изведени са съответните стационарни вероятностни разпределения, като те са дискутирани в контекста на теория на информацията и интерпретацията им от гледна точка на моделиране на мигрантски потоци.

В последната част от дисертацията съдържа описание на приносите, публикациите на автора, които са в основата на дисертацията, както и списък с използваните и цитираните литературни източници.

II Съдържание на дисертацията

Глава 1. Въведение

В уводната глава е направен обзор на съвременното състояние на изследванията на структурата и динамиката на сложните мрежи. В параграф 1.1 са въведени основните понятия от теория на графите, като математическа рамка за описание структурата на мрежите. Въведени са понятия като път в мрежи, клъстерни коефициенти, корелация между върхове в мрежи и др. Разгледана е топологията на реалните мрежи и са въведени някои основни мрежови модели, които я описват - случайни мрежи; мрежи, притежаващи феномен на малкия свят; безмасабни мрежи и др.

В параграф 1.2 накратко са разгледани някои динамични процеси в мрежи като перколация, разпространяване на епидемии и слухове, каскадни сривове.

Глава 2. Мрежов канал с две и с три рамена

В параграфи 2.1 и 2.2 от дисертацията е изграден модел на специфично движение на вещество през канал, изграден от върховете на мрежа, състоящ се от две рамена (Фиг. 1). Моделът е естествено разширение и обобщение на този, разглеждан в [50]. В този модел веществото постъпва в мрежата само през един връх, наречен нулев или източник и започва своето движение като последователно преминава през редицата от съседни върхове (плътни окръжности), образувайки рамото A на канал на движение. Достигайки върха $n/0$ от A каналът се разклонява, като част от веществото напуска рамото A и продължава своето движение по разклонението му - рамото B .

В реалните системи броят на клетките във всяко от рамената на канала е крайно. Канали с безкраен брой клетки в рамената им обаче са добро приближение за преход към големи, свързани мрежи, което мотивира разглеждането тук и на двата варианта на модела:

- Канал, изграден от две безкрайни рамена (параграф 2.1);
- Канал, изграден от две крайни рамена (параграф 2.2).

В параграф 2.3 се изгражда модел на движение през клетките на канал, изграден от три рамена. Разгледани са две възможни взаимни разположения на рамената: дясно и ляво ориентиран канал (Фиг. 4).

Първият от тях е въведен в параграф 2.3.1. При него веществото постъпва в канала само чрез една клетка от рамото A , наречена нулева или източник и започва своето движение като последователно преминава през редицата от съседни клетки (плътни окръжности), образувайки рамото A на канала на движение (Фиг. 4). Достигайки клетката $n/0$ от рамото A каналът се разклонява, като част от веществото напуска A и продължава своето движение по рамото B . Останалата част продължава своето движение по A до достигане на клетката $m/0$, $m > n$. Там потокът вещество отново се разклонява и част от него напуска рамото A и продължава своето движение по второто разклонение - рамото C .

При вторият от тях (2.3.2), достигайки клетката $n/0$ от рамото A каналът се разклонява, като част от веществото напуска A и продължава своето движение по рамото B до достигане на клетката му $m/0$. Там потокът вещество отново се разклонява и част от него напуска рамото B и продължава своето движение по рамото C .

Във всички тези модели, всеки връх от дадено рамо се разглежда като клетка, а всяко рамо като безкрайна (или съответно крайна) редица от клетки, индексирани с последователни неотрицателни цели числа. Освен това

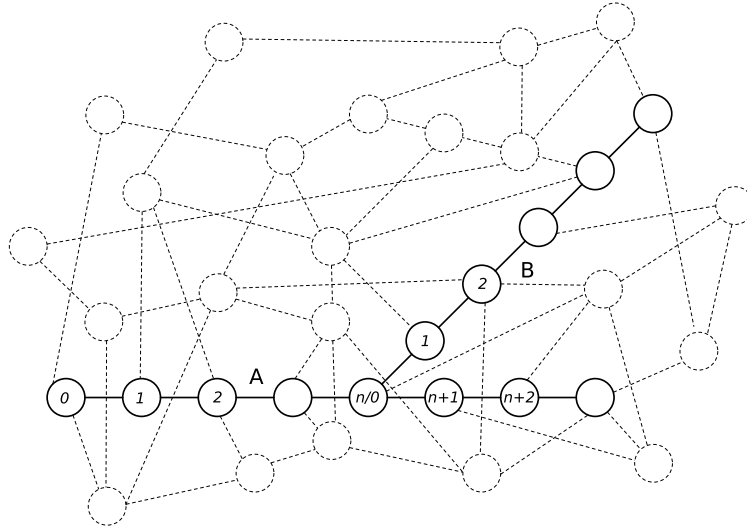
- Всяка клетка от канала обменя вещество с два свои съседа, с изключение на източника, свързан само с един съсед и клетката $n/0$ от рамото A , свързана с три свои съседа.
- Обмяната на вещество (движението) между клетките може да става само в една посока по протежение на канала, започвайки от източника и продължавайки последователно през съседни клетки по посока на нарастване на техния индекс.
- Част от веществото „изтича” от канала към мрежата (или в околното пространство) чрез всяка негова клетка. „Изтичането” е също само в една посока - от канала към мрежата.
- Веществото може да има предпочитание към някои от клетките на канала, т.е. каналът е проектиран по такъв начин, че веществото да има тенденция да се концентрира в някои от клетките му.

Предпочитанието към определени клетки е твърде специфично и позволява използването на модела за изследване на движения както на животни или хора, така и на всякакви системи от физически обекти, които имат предпочитание към върховете на мрежата. „Изтичането” на вещество от канала от своя страна, може да се разглежда както като загуба на вещество от канала, така и като използване на част от него в някакъв процес.

2.1. Мрежов канал с две безкрайни рамена

Математическо формулиране на задачата Нека някакво количество вещество x^q е разпределено по всички клетки на рамото $q = A, B$ и може да се движи от клетка в клетка. Нека x_i^q е количеството вещество в i -тата клетка на рамото q . Тогава

$$(1) \quad x^q = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^q.$$



Фигура 1: Канал с две рамена. Клетките на канала са част от мрежа и са представени с пълтни окръжности, а ребрата, които ги свързват - с пълтни линии. В клетката, обозначен с $n/0$ каналът се разделя на две рамена. Тук n е номера на разделителната клетка от гледна точка на главното рамо A (хоризонталната верига от клетки), а 0 е номера на тази клетка от гледна точка на второто рамо B . Върховете от мрежата, които не са част от разглеждания канал са свързани с ребра, обозначени с пунктирани линии. Входната клетка на канала е обозначена с 0 и принадлежи на рамото A .

Количеството вещество x_i^q във всяка клетка може да се променя вследствие на три процеса:

1. Поток от вещество s^q навлиза от околното пространство в рамото q през неговата нулева клетка, като
 - (а) за главното рамо $q = A$: потокът s^A навлиза в канала от околното пространство през нулевата клетка на A ;
 - (б) за рамото B : потокът s^B е част от веществото x_n^A в n -тата клетка на родителското рамо A . Това вещество „изтича“ от рамото A към рамото B ;
2. Поток от вещество f_i^q преминава за единица време от i -тата клетка в $i + 1$ -та клетка на рамото q ;
3. Поток от вещество g_i^q „изтича“ за единица време през i -тата клетка на рамото q . Това „изтичане“ може да бъде два вида:
 - (а) изтичане към околното пространство на канала. То води до загуба на вещество от канала.
 - (б) изтичане към друго рамо на канала. В случая от рамото A към рамото B .

Допускането, че процесът на движение на веществото е непрекъснат във времето, позволява той да бъде моделиран математически чрез система от обикновени диференциални уравнения:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_0^q}{dt} &= s^q - f_0^q - g_0^q; \\
 \frac{dx_i^q}{dt} &= f_{i-1}^q - f_i^q - g_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q = A, B.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Съществуват два режима на функциониране на канала: стационарен и нестационарен режим, като обект на разглеждане по-долу ще бъде само стационарния режим, при който

$dx_i^q/dt = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Нека величините, отнасящи се за стационарния случай обозначим с горен индекс *. Тогава от (2) се получава

$$(3) \quad f_0^{q*} = s^{q*} - g_0^{q*}; \quad f_i^{q*} = f_{i-1}^{q*} - g_i^{q*} \quad \text{или} \quad f_i^{q*} = s^{q*} - \sum_{j=0}^i g_j^{q*}$$

Следователно процесът на движение на веществото в стационарния случай е напълно определен от величините s^{q*} и g_j^{q*} , $j = 0, 1, \dots$.

Величините s^q , f_i^q и g_i^q в системата (2) имат следната форма ($\alpha_i^q, \beta_i^q, \gamma_i^q, \sigma$ са константи)

$$(4) \quad \begin{aligned} s^A &= \sigma x_0^A = \sigma_0 > 0; \\ s^B &= \delta_n^A x_n^A; \quad 1 \geq \delta_n^A \geq 0, \\ f_i^q &= (\alpha_i^q + \beta_i^q i) x_i^q; \quad 1 > \alpha_i^q > 0, \quad 1 \geq \beta_i^q \geq 0, \\ g_i^q &= \gamma_i^{q*} x_i^q; \quad 1 \geq \gamma_i^{q*} \geq 0 \rightarrow \text{изтичане на вещество} \end{aligned}$$

Величината $\gamma_i^{q*} = \gamma_i^q + \delta_i^q$ описва начина, по който веществото напуска канала. Ще предположиме, че $\delta_i^B = 0$ за всяко i , а $\delta_i^A = 0$ за всяко i с изключение на $i = n$. Това означава, че в n -тата клетка на рамото A освен стандартното изтичане на вещество към околното пространство $\gamma_n^A x_n^A$, съществува и допълнително изтичане, определено от израза $s^B = \delta_n^A x_n^A$. Това допълнително изтичане осигурява количеството вещество, което започва своето движение по второто рамо на канала.

Въз основа на горното, системата диференциални уравнения, описващи движението на веществото в двете рамена на канала придобиват вида

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{dx_0^q}{dt} &= s^q - \alpha_0^q x_0^q - \gamma_0^{q*} x_0^q; \\ \frac{dx_i^q}{dt} &= [\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q] x_{i-1}^q - (\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{q*}) x_i^q; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ще бъде разгледан случая, при който в целия канал е установен стационарен режим на движение на веществото. По принцип, решенията на системата (5), $i = 1, 2, \dots$ са

$$(6) \quad \begin{aligned} x_i^A &= x_i^{A*} + \sum_{j=0}^i b_{ij}^A \exp[-(\alpha_j^A + j\beta_j^A + \gamma_j^{A*})t]; \\ x_i^B &= x_i^{B*} + \sum_{j=0}^i b_{ij}^B \exp[-(\alpha_j^B + j\beta_j^B + \gamma_j^{B*})t] + \sum_{j=1}^n c_{ij} \exp[-(\alpha_j^A + j\beta_j^A + \gamma_j^{A*})t], \end{aligned}$$

където x_i^{q*} е стационарната част на решението. В изразите под експонентите няма отрицателни коефициенти и следователно при $t \rightarrow \infty$, системата се стреми към стационарните си решения. b_{ij}^q и c_{ij} ($i = 1, \dots$) са коефициенти, зависещи от параметрите на рамената, като b_{ii} могат да бъдат получени от началните условия. Изразите за тези коефициенти могат да бъдат намерени в текста на дисертацията.

Стационарен режим на функциониране на канала. В дисертацията се разглежда се само случая, при който процесът на движение е достигнал стационарно състояние в целия канал. От системата уравнения (5) за стационарния случай $dx_i^q/dt \rightarrow 0$ се получава следната

рекурентна зависимост за количеството вещество x_i^* в i -тата клетка на рамото q ($i=1,2,\dots$, $q=A,B$):

$$(7) \quad x_i^{q*} = \frac{\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q}{\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{q*}} x_{i-1}^{q*} \quad \text{или} \quad x_i^* = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} x_0^*,$$

а от първите уравнения на системата (5), изрази за количеството вещество x_0^{q*} в нулевите клетки на двете рамена. Условието $dx_i^q/dt = 0$ води до $\sigma = \alpha_0^A + \gamma_0^A$ за рамото A , което означава, че количеството вещество в нулевата му клетка x_0^{q*} е свободен параметър. За количеството вещество в нулевата клетка на рамото B това условие води до:

$$(8) \quad x_0^{B*} = \frac{\delta_n^A x_n^{A*}}{\alpha_0^B + \gamma_0^B}.$$

Вероятностни разпределения, свързани със стационарния поток. Отношението $y_i^{*q} = x_i^{*q}/x^{*q}$ на количеството вещество в i -тата клетка на рамото q към общото количество вещество в това рамо може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на разпределението на дискретна случайна величина ζ

$$(9) \quad y_i^{*q} = p(\zeta = i), \quad i = 0, 1, \dots$$

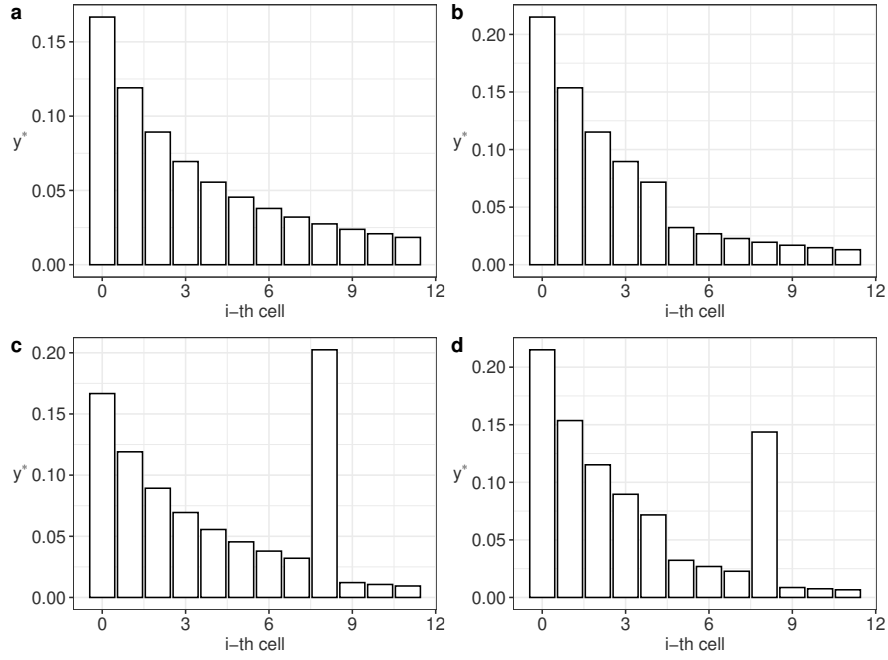
Общото количество вещество в дадено рамо е равно на сумата на количеството вещество по всичките му клетки:

$$(10) \quad x^* = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^* = x_0^* \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} \right\},$$

където горния индекс q отново е изпуснат. Тогава, от (7) и (10) стационарно разпределение (9) придобива вида ($i=1,2,\dots$)

$$(11) \quad y_0^* = 1 / \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \right\};$$

$$y_i^* = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} / \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \right\}.$$



Фигура 2: Вероятностни разпределения (11) за главното рамо при безкраен канал с две рамена при случай с едно (Фиг. 2a и 2c) и с две рамена (Фиг. 2b и 2d). Параметрите $\alpha_i^q = 0.5$, $\beta_i^q = 0.1$ и $\gamma_i^q = 0.1$ са фиксирани за всяко i и за двете рамена. Фиг. (2a): Каналът е изграден от едно рамо A . Параметрите $\delta_i^q = 0$ за всяко i . Фиг. (2b): Вече присъства рамото B , $0 \neq \delta_5^A = 0.9$. Фиг. (2c): Отново канал с едно рамо, но с $\alpha_8^A = \beta_8^A = 0.01$, а на Фиг. (2d) към него е добавено рамото B , $\delta_5^A = 0.9$.

Фиг. (2) отразява вероятностното разпределение (11) за главното рамо A при канал с едно (Фиг. 2a и 2c) и канал с две рамена (Фиг. 2b и 2d) за първите му 12 стойности. Фиг. (2a) и (2b) изобразяват разпределението съответно при липса на рамото B и при присъствието му за частния случай с еднакви параметри за всички клетки. Фиг. (2c) и (2d) изобразяват същия случай, с изключение на $\alpha_8^A = \beta_8^A = 0.01$, което води до концентрация на вещество в тази клетка. Изразите (11) показват също, че разпределенията в различните рамена на канала, при еднакви параметри за i -тите им клетки, са напълно идентични

2.2. Мрежов канал с две крайни рамена

Математическо формулиране на задачата. Нека разгледаме канал, изграден от рамената A и B , с краен брой клетки $N_q + 1$ всяко ($q = A, B$), индексирани последователно от 0 до N_q . Каналът е изграден по същия начин като безкраен канал, като единствената разлика е в крайния брой на клетките на всяко от двете рамена. Следователно за нулевата клетка и клетките $1, 2, \dots, N_q - 1$ моделът се описва със системата (2) за всяко от рамената на канала, уравнението, управляващо количеството вещество в N_q -та клетка е

$$(12) \quad \frac{dx_{N_q}^q}{dt} = f_{N_q-1} - g_{N_q}^q.$$

N_q -та клетка се различава от останалите. За разлика от тях, в нея веществото изтича само към околното пространство, но не и към съседна клетка от рамото. Следователно

$$\begin{aligned}
\frac{dx_0^q}{dt} &= s^q - \alpha_0^q x_0^q - \gamma_0^{q*} x_0^q; \quad s^A = \sigma x_0^A = \sigma_0^A; \quad s^B = \delta_n^A x_n^A, \quad n \leq N_A \\
\frac{dx_i^q}{dt} &= [\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q] x_{i-1}^q - (\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{q*}) x_i^q; \\
&\quad i = 1, 2, \dots, N_q - 1, \\
(13) \quad \frac{dx_{N_q}^q}{dt} &= [\alpha_{N_q-1}^q + (N_q - 1)\beta_{N_q-1}^q] x_{N_q-1}^q - \gamma_{N_q}^q x_{N_q}^q
\end{aligned}$$

Стационарен режим на функциониране на канала. От вторите уравнения на системата (13) за стационарния случай $dx_i^q/dt \rightarrow 0$ се получава следната рекурентна зависимост за количеството вещество x_i^{q*} във вътрешните клетки ($0 < i < N_q$) на рамото q ($i = 1, 2, \dots, N_q - 1, \quad q = A, B$)

$$(14) \quad x_i^{q*} = \frac{\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q}{\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{q*}} x_{i-1}^{q*}, \quad \text{или} \quad x_i^* = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} x_0^*,$$

където поради еднаквата функционална форма за двете рамена на канала в (14) отново е изпуснат горния индекс q . От първите уравнения на системата (13) се получават изрази за количеството вещество x_0^{q*} в нулевите клетки на двете рамена. Условието $dx_0^q/dt = 0$ води до $\sigma = \alpha_0^A + \gamma_0^A$ за рамото A , което означава, че количеството вещество в нулевата му клетка x_0^{q*} е свободен параметър. За количеството вещество в нулевата клетка на рамото B това условие води до

$$(15) \quad x_0^{B*} = \frac{\delta_n^A x_n^{A*}}{\alpha_0^B + \gamma_0^B}.$$

При стационарен режим, от последните уравнения на системата (13) за количеството вещество $x_{N_q}^{q*}$ в специалните клетки N_q , последни за двете рамена на канала, се получава

$$(16) \quad x_{N_q}^{q*} = \frac{\alpha_{N_q-1}^q + (N_q - 1)\beta_{N_q-1}^q}{\gamma_{N_q}^{q*}} x_{N_q-1}^{q*}$$

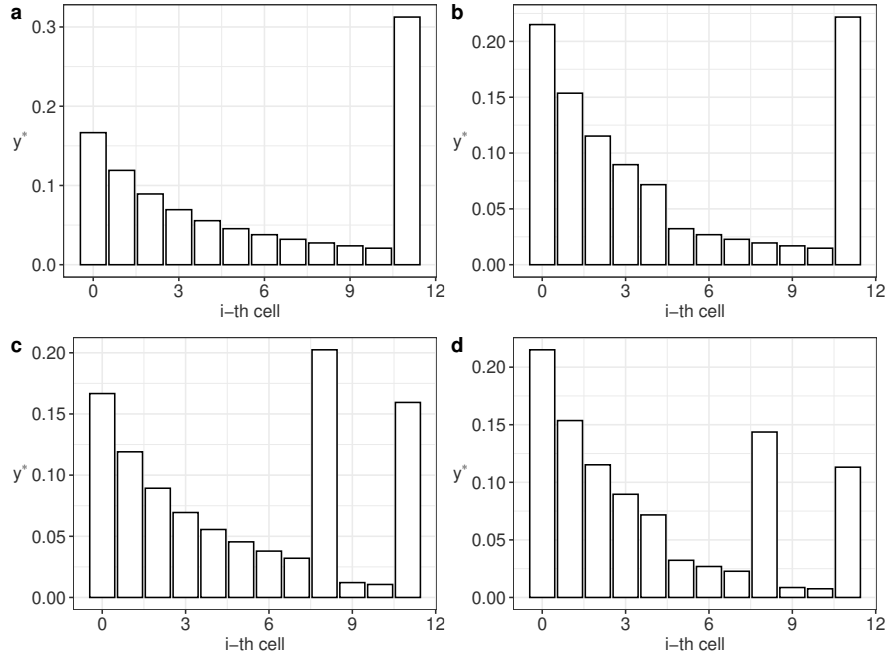
или

$$(17) \quad x_{N_q}^* = \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q - 1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q - j - 2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q - j - 1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} x_0^*$$

Вероятностно разпределение, породено от потока в рамото q . Отношението $y_i^q = x_i^q/x^q$ може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на разпределението на дискретна случайна величина ζ

$$(18) \quad y_i^q = p(\zeta = i), \quad i = 0, 1, \dots, N_q.$$

Общото количество вещество в дадено рамо е равно на сумата на количеството вещество по



Фигура 3: Вероятностни разпределения (20) за главното рамо при краен канал с две рамена. Параметрите $\alpha_i^q = 0.5$, $\beta_i^q = 0.1$ и $\gamma_i^q = 0.1$ са фиксирани за всяко i и за двете рамена. Фиг. (3a): Каналът е изграден от едно рамо A . Параметрите $\delta_i^q = 0$ за всяко i . Фиг. (3b): Вече присъства рамото B , $0 \neq \delta_5^A = 0.9$. Фиг. (3c): Отново канал с едно рамо, но с $\alpha_8^A = \beta_8^A = 0.01$, а на Фиг. (3d) към него е добавено рамо B , $\delta_5^A = 0.9$.

ВСИЧКИ МУ КЛЕТКИ:

$$(19) \quad x^{q*} = x_0^* \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right\}$$

Съответното стационарно разпределение (18) придобива вида:

$$y_0^* = 1 / \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right\}.$$

$$\begin{aligned}
y_i^* &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \Bigg/ \\
&\left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \right. \\
&\left. \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right\}, \\
y_{N_q}^* &= \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \Bigg/ \\
&\left\{ 1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \right. \\
&\left. \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right\}.
\end{aligned}
\tag{20}$$

На Фиг. (3) са изобразени различни форми на това разпределение при няколко конкретни стойности на параметрите.

Вероятностно разпределение, породено от потока в целия канал. Може да бъде дефинирано и друго вероятностно разпределение, като отношение на количеството вещество в дадена клетка, независимо от кое рамо към общото количество вещество в целия канал. Тогава вероятностното разпределение на веществото в целия канал ще се изрази като:

$$z_i^{q*} = \frac{x_i^{q*}}{x^*}, \quad q = A, B.
\tag{21}$$

Количеството вещество, разпределено по клетките и на двете рамена на канала при стационарен режим е ($q = A, B$)

$$x^* = \sum_q \left[x_0^{q*} + \sum_{j=1}^{N_q-1} x_j^{q*} + x_{N_q}^{q*} \right].
\tag{22}$$

Следователно разпределението (18) се свежда до:

$$z_0^{q*} = 1 / \left\{ \sum_q \left(1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right) \right\}.$$

$$z_i^{q*} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} / \left\{ \sum_q \left(1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right) \right\},$$

$i = 1, 2, \dots, N_q - 1,$

$$(23) \quad z_{N_q}^{q*} = \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} / \left\{ \sum_q \left(1 + \sum_{k=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} + \frac{\alpha_{N_q-1} + (N_q-1)\beta_{N_q-1}}{\gamma_{N_q}^*} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-2} + (N_q-j-2)\beta_{N_q-j-2}]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} [\alpha_{N_q-j-1} + (N_q-j-1)\beta_{N_q-j-1} + \gamma_{N_q-j-1}^*]} \right) \right\}.$$

2.3. Мрежов канал с три рамена

Математическо формулиране на задачата. Нека някакво количество субстанция x^q е разпределено по всички клетки на рамото $q = A, B, C$ и тази субстанция може да се движи от клетка към клетка (Фиг. 4). Нека x_i^q да е количеството вещество i -тата клетка на рамото q . Тогава

$$(24) \quad x^q = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^q, \quad q = A, B, C.$$

Съдържанието x_i^q на всяка клетка може да се променя вследствие на следните три процеса:

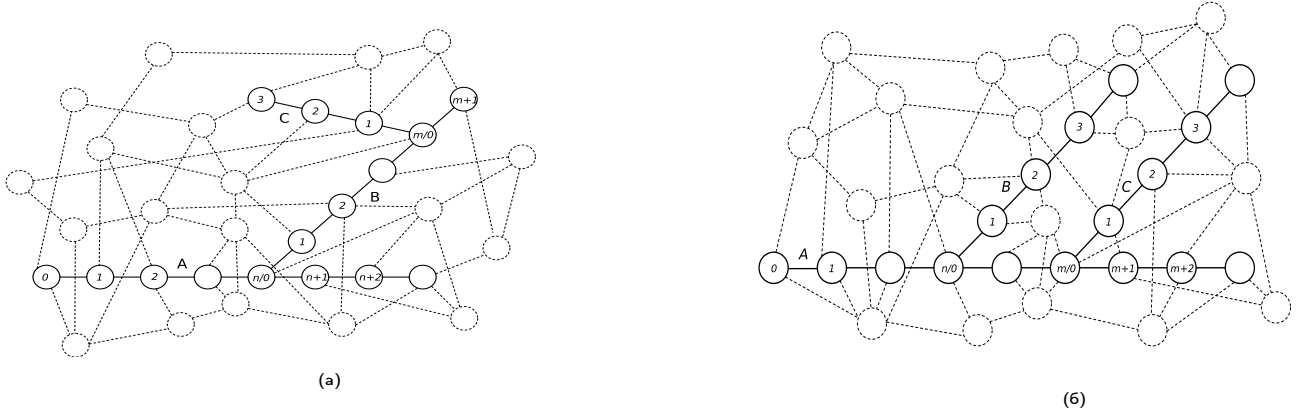
1. Поток от вещество s^q навлиза от околното пространство в рамото q през неговата нулева клетка, като
 - (а) за главното рамо $q = A$: потокът s^A навлиза в канала от околното пространство през нулевата клетка на A ;
 - (б) за рамото B : потокът s^B е част от веществото x_n^A в n -тата клетка на родителското рамо A . Това вещество „изтича“ от рамото A към рамото B ;
 - (в) за рамото C :
 - i. за дясно ориентиран канал (Фиг. 4b): потокът s^C е част от веществото x_m^A в m -тата клетка на родителското рамо A . Това вещество „изтича“ от рамото A към рамото C ;
 - ii. за ляво ориентиран канал (Фиг. 4a): потокът s^C е част от веществото x_m^B в m -тата клетка на рамото B . Това вещество „изтича“ от рамото B към рамото C ;
2. Поток от вещество f_i^q преминава за единица време от i -тата клетка в $i + 1$ -та клетка на рамото q ;
3. Поток от вещество g_i^q „изтича“ за единица време през i -тата клетка на рамото q . Това „изтичане“ може да бъде два вида:
 - (а) изтичане към околното пространство на канала. То води до загуба на вещество от канала.
 - (б) изтичане към друго рамо на канала.

Ще предположим, че процесът на движение на веществото е непрекъснат във времето и следователно може да се моделира математически чрез система обикновени диференциални уравнения:

$$(25) \quad \begin{aligned} \frac{dx_0^q}{dt} &= s^q - f_0^q - g_0^q; \\ \frac{dx_i^q}{dt} &= f_{i-1}^q - f_i^q - g_i^q, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q = A, B, C \end{aligned}$$

като величините s^q , f_i^q и g_i^q в (25) имат следната форма ($\alpha_i^q, \beta_i^q, \gamma_i^q, \sigma$ са константи)

$$(26) \quad \begin{aligned} s^A &= \sigma x_0^A > 0 \\ s^B &= \delta_n^A x_n^A; \\ s^C &= \delta_m^A x_m^A; \quad \text{или} \quad s^C = \delta_m^B x_m^B; \quad 1 \geq \delta_i^q \geq 0 \\ f_i^q &= (\alpha_i^q + \beta_i^q i) x_i^q; \quad 1 > \alpha_i^q > 0, \quad 1 \geq \beta_i^q \geq 0 \\ g_i^q &= \gamma_i^{*q} x_i^q; \quad 1 \geq \gamma_i^{*q} \geq 0 \rightarrow \text{изтичане на вещество} \end{aligned}$$



Фигура 4: Част от мрежа и канал, изграден от три рамена A , B и C . Клетките на канала са изобразени с пълтни окръжности, а свързващите ги ребра с пълтни линии. Клетката $n/0$ е номерът на разклоняващата клетка от гледна точка на рамото A . m е номерът на разклоняващата за рамото C клетка от гледна точка на рамото B (ляво ориентирана мрежа Фиг. 4а) или от гледна точка на рамото A (дясно ориентирана мрежа Фиг. 4б) Клетките от мрежата, които не са част от разглеждания канал са свързани с пунктирани линии.

Величината $\gamma_i^{*q} = \gamma_i^q + \delta_i^q$ е специфична и описва начина по който веществото напуска рамото q и „изтича“ в околното пространство.

На базата на всичко казано до тук системата обикновени диференциални уравнения, описващи процеса придобива вида:

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{dx_0^q}{dt} &= s^q - \alpha_0^q x_0^q - \gamma_0^{*q} x_0^q; \quad q \in A, B, C \\ \frac{dx_i^q}{dt} &= [\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q] x_{i-1}^q - (\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{*q}) x_i^q; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Стационарен режим на функциониране на канала. Ще разглеждаме само случая, при който процесът на движение е достигнал стационарно състояние в целия канал. В този случай $dx_0^q/dt = 0$ и от първото от уравненията (27) следва, че

$$(28) \quad x_0^q = \frac{s^q}{\alpha_0^q + \gamma_0^{*q}}.$$

За основното рамо A този израз означава, че $\sigma = \alpha_0^A + \gamma_0^A$, т.е. количеството вещество x_0^A в 0-та клетка на рамото A е свободен параметър. За рамената B и C горният израз означава, че

$$(29) \quad x_0^{*B} = \frac{\delta_n^A x_n^{*A}}{\alpha_0^B + \gamma_0^B}; \quad x_0^{*C} = \frac{\delta_m^A x_m^{*A}}{\alpha_0^C + \gamma_0^C}.$$

за дясно ориентиран канал и

$$(30) \quad x_0^{*B} = \frac{\delta_n^A x_n^{*A}}{\alpha_0^B + \gamma_0^B}; \quad x_0^{*C} = \frac{\delta_m^B x_m^{*B}}{\alpha_0^C + \gamma_0^C}.$$

за ляво ориентиран.

От вторите уравнения на системата (27) за стационарния случай $dx_i^q/dt \rightarrow 0$ се получава следната рекурентна зависимост за количеството вещество x_i^* в i -тата клетка на рамото $q = A, B$.

$$(31) \quad x_i^{q*} = \frac{\alpha_{i-1}^q + (i-1)\beta_{i-1}^q}{\alpha_i^q + i\beta_i^q + \gamma_i^{q*}} x_{i-1}^{q*} \quad \text{или} \quad x_i^* = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} x_0^*, \quad i = 1, 2, \dots$$

Вероятностните разпределения свързани със стационарния поток са разгледани в параграф 2.3.3. Отношението на количеството вещество в i -тата клетка на рамото q към общото количество вещество в това рамо $y_i^q = x_i^q/x^q$ може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на разпределението на дискретна случайна величина ζ

$$(32) \quad y_i^q = p(\zeta = i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Общото количество вещество в дадено рамо е равно на сумата на количеството вещество по всичките му клетки:

$$(33) \quad x^{q*} = \sum_{i=0}^{\infty} x_i^{q*} = x_0^{q*} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j-1} + (k-j-1)\beta_{k-j-1}}{\prod_{j=0}^{k-1} \alpha_{k-j} + (k-j)\beta_{k-j} + \gamma_{k-j}^*} \right\}$$

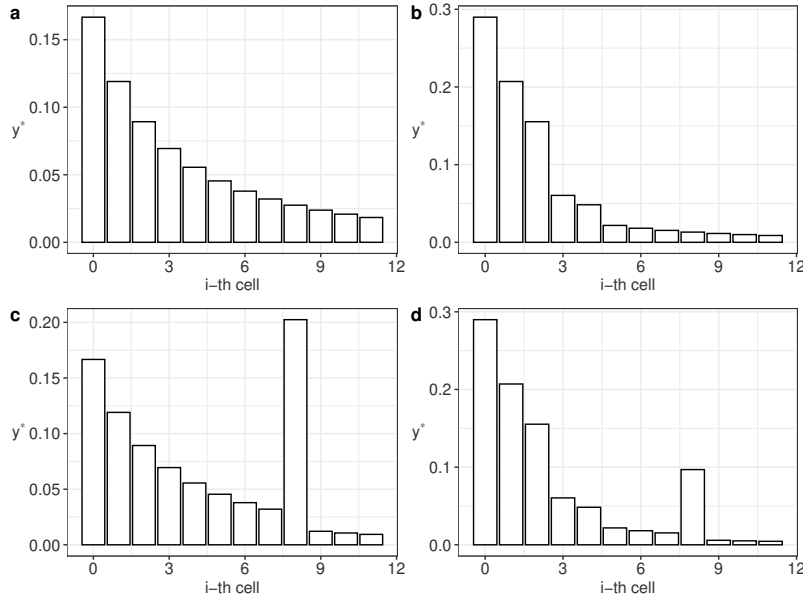
където горния индекс q отново е изпуснат.

Тогава, от (31) и (33) стационарно разпределение (32) придобива вида

$$(34) \quad y_0^* = \frac{1}{\left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \right\}};$$

$$y_i^* = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} \alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma_{i-j}^*} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots$$

На Фиг. (5) е изобразено това разпределение за за първите 12 клетки дясно ориентиран канал. Параметрите $\alpha_i^q = 0.5$, $\beta_i^q = 0.1$ и $\gamma_i^q = 0.1$ са фиксирани за всяко i и за двете рамена, а параметърът $\delta_3^A = \delta_5^A = 0.9$ и $\delta_i^q = 0$ за всички останали i . Забелязва се редукция в



Фигура 5: Вероятностни разпределения (34) за главното рамо при безкраен канал с две рамена при случай с едно (Фиг. 5а и 5с) и с две рамена (Фиг. 5b и 5d). Параметрите $\alpha_i^q = 0.5$, $\beta_i^q = 0.1$ и $\gamma_i^q = 0.1$ са фиксирани за всяко i и за двете рамена. Фиг. (5а): Каналът е изграден от едно рамо A . Параметрите $\delta_i^q = 0$ за всяко i . Фиг. (5b): Вече присъстват рамената B и C , $0 \neq \delta_3^A = \delta_5^A = 0.9$. Фиг. (5с): Отново канал с едно рамо, но с $\alpha_8^A = \beta_8^A = 0.01$, а на Фиг. (5d) към него са добавени рамената B и C $\delta_3^A = \delta_5^A = 0.9$.

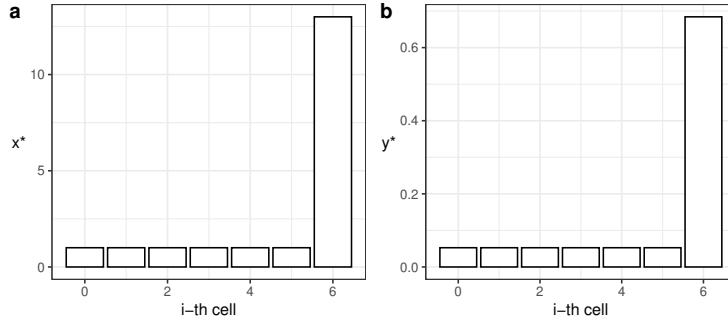
стойностите на разпределението за клетките след 3-та и 5-та, в резултат на напускане на част от веществото към рамената B и C . На Фиг. (5d) е изобразено същото разпределение, но с два различни от горните параметъра за 8-та клетка на A $\alpha_8^A = \beta_8^A = 0.01$, което води до натрупване на вещество в тази клетка. Ясно се забелязва и редуцирането на стойността на разпределението в клетките с номера по-големи или равни на $i = 3$ и $i = 5$, вследствие както от изтичането на вещество към рамената B и C , така и от концентрирането му в деветата клетка.

2.4. Заключение бележки

В глава 2 са изведени аналитични зависимости на разпределението на вещество при движението му по клетките на канал с две и три рамена в стационарен режим. В резултат на тези зависимости са изведени вероятностните разпределения (11), (20), (23) и (34), на базата на които могат да бъдат направени редица заключения, някои от които са обсъдени накратко в параграф 2.4.

1. Форма на получените разпределения. Нека разгледаме дясно ориентиран канал с три рамена (Фиг. 4б) и обозначим с $x_i^{*(1)}$ количеството вещество в i -тата клетка на рамото A в отсъствието на B и C , т.е. $\delta_i^A = 0$ за всяко i . С $x_i^{*(2)}$ нека обозначим количеството на веществото в i -тата клетка на рамото A , когато рамото B присъства (но без C), т.е. за някое $i = n$ $\delta_n^A \neq 0$ и с $x_i^{*(3)}$ количеството вещество в i -тата клетка на рамото A в присъствието и на трите рамена ($\delta_n^A \neq 0$ и $\delta_m^A \neq 0$). Тогава ако обозначим с $x_i^{*(3)}$ количеството вещество в i -тата клетка на рамото A , то при $i \geq m$ ($\delta_m \neq 0$, $m > n$) се получава израза

$$(35) \quad \frac{x_i^{*(3)}}{x_i^{*(1)}} = \left[\frac{1}{1 + \frac{\delta_n}{\alpha_n + n\beta_n + \gamma_n}} \right] \left[\frac{1}{1 + \frac{\delta_m}{\alpha_m + m\beta_m + \gamma_m}} \right], \quad i \geq m,$$



Фигура 6: Равномерно разпределение като частен случай на разпределението (20). Параметрите $\gamma_i = \beta_i = 0.05$ и $\delta_i = 0$ са фиксирани за всяко $i \in [0, 6]$, $\alpha_i = 1 - 0.1 \cdot i$, $i \in [0, 6]$. $x_0 = 1$ е свободен параметър. $N = 6 < 1/(\beta + \gamma) = 10$

т.е. присъствието на рамената B и C редуцират количеството вещество в A , без да променя съдържанието на клетките $i < n$ и съответно $i < m$.

След като цялото количество вещество в рамото намалява, но в различно съотношение за различните клетки, то и разпределението (11) коренно ще се промени. Така например, чрез сумиране на всички уравнения (5) за главното рамо на канал с две рамена (Фиг. 1) при $\gamma_i^A = \gamma^A$ за всяко i не е трудно да се получи, че

$$(36) \quad \frac{y_0^{*(2)}}{y_0^{*(1)}} = \frac{1}{1 - \frac{\delta_n^A}{\alpha_0^A + \gamma^A} \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [\alpha_{i-j-1}^A + (i-j-1)\beta_{i-j-1}^A]}{\prod_{j=0}^{n-1} \alpha_{i-j}^A + (i-j)\beta_{i-j}^A + \gamma^{*A}}} > 1,$$

т.е. присъствието на рамото B радикално променя разпределението. Тази промяна може да бъде много голяма при относително малки стойности на параметрите α_0^A и γ^A и големи стойности на δ_n^A .

От израза (7), даващ стойността на количеството вещество в i -тата клетка на канала следва

$$(37) \quad \frac{x_i^*}{x_{i+1}^*} = \frac{\alpha_{i+1} + (i+1)\beta_{i+1} + \gamma_{i+1}^*}{\alpha_i + i\beta_i},$$

от където е ясно, че количеството вещество в $(i+1)$ -та клетка може да е по-голямо от количеството в i -тата при достатъчно малки α_{i+1} и β_{i+1} спрямо α_i и β_i . Освен това, винаги съществува такава комбинация от параметри, при която в някакъв краен брой последователни клетки от рамото количеството вещество може да е еднакво (Фиг. 6)

2. Някой частни режими на пренос. В зависимост от вида на изразите $f_i^q = (\alpha_i^q + i\beta_i^q)x_i^q$ и $g_i = \gamma_i^{q*}x_i^q$ стационарните разпределения (11), (20), (23) и (34) могат да приемат различни форми. Различните им форми са свързани с принципно различни механизми на движение на веществото.

- Равномерно разпределение. Нека разгледаме краен канал от две рамена (Фиг. 3), при който разпределението има вида (20). Нека сега, $\beta_i = \beta$ и $\gamma_i = \gamma$ за всяко i и освен това $\alpha_i = \alpha_0 - i(\beta + \gamma)$. Последното равенство е подбрано така, че да удовлетворява $x_i = x_{i+1}$ от (37). От условието $\alpha_i > 0$ следва изискването $N < \alpha_0/(\beta + \gamma)$. При тези условия

$$(38) \quad \begin{aligned} y_i^* &= \frac{\gamma}{\alpha_0 + \gamma}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_N^* &= 1 - \frac{\gamma}{\alpha_0 + \gamma} \cdot N \end{aligned}$$

При $N = \alpha_0/\gamma$ разпределението (38) приема еднакви стойности $y_i = \gamma/(\alpha_0 + \gamma)$ за всяко $i = 1, 2, \dots, N$.

- Геометрично разпределение. При постоянен пренос на вещество, както между съседните клетки, така и към околното пространство, $\gamma_i^* = \gamma$, а $f_i = \alpha$ за всяко i . Тогава разпределението (11) придобива вида

$$(39) \quad \begin{aligned} y_0^* &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}; \\ y_i^* &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-i} = \frac{\gamma}{\alpha} \left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\right)^{-1-i} \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Разпределението (39) може да бъде записано и като

$$(40) \quad y_i = (1 - q)q^i, \quad \text{където } q = \alpha/(\alpha + \gamma).$$

- Степенно разпределение. Нека е изпълнено $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i^* = (1 + i)/(2 + i)$ за всяко i . Тогава за стационарното разпределение (11) се получава

$$(41) \quad \begin{aligned} y_0^* &= \frac{6}{\pi^2} \\ y_i^* &= \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1 + i)^2} \sim \frac{6}{\pi^2} \cdot i^{-2}. \end{aligned}$$

Полученото разпределение следва степенен закон.

- Разпределение на Waring. Нека $\beta_i = \beta \neq 0$ и $k = \alpha_i/\beta_i = \alpha/\beta$; $a = \gamma^*/\beta$. Изразът за съответното стационарно разпределение (39) придобива вида

$$(42) \quad P(\zeta = i) = P(\zeta = 0) \frac{(k - 1)^{[i]}}{(a + k)^{[i]}}; \quad k^{[i]} = \frac{(k + i)!}{k!}; \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $P(\zeta = 0) = y_0^* = a/(a + k)$ е относителната част на намиращото се в първата клетка на рамото количество вещество. Този израз описва случая, при който количеството вещество в първата клетка на рамото е пропорционално на количеството субстанция в цялото рамо. Въвеждайки обозначенията $\rho = a$ и $k = l$, разпределението (11) придобива точно вида на разпределението на Waring (Фиг. 7а) (вероятностно разпределение на неотрицателни цели числа, наименувано на Edward Waring - шестият Лукасов професор по математика от Кеймбридж от 18 век.) [57–59]

$$(43) \quad p_l = \rho \frac{\alpha^{(l)}}{(\rho + \alpha)_{(l+1)}}; \quad \alpha^{(l)} = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + l - 1)$$

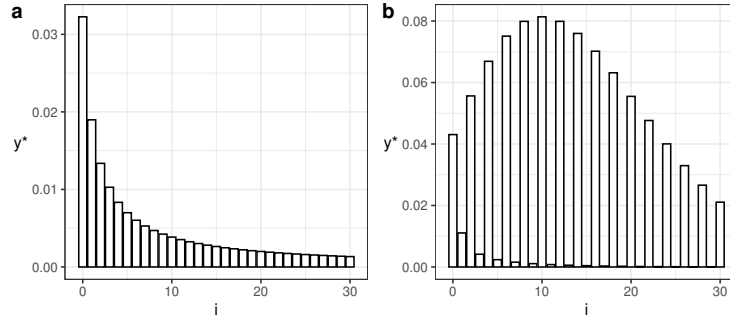
Параметърът ρ е наречен параметър на опашката (tail parameter). Разпределението на Waring съдържа в себе си различни други разпределения като частни случаи. Нека $i \rightarrow \infty$, тогава то се редуцира до една от формите на разпределението на Zipf [60].

$$(44) \quad p_l \approx \frac{1}{l^{(1+\rho)}}.$$

Ако $\alpha \rightarrow 0$ разпределението на Waring се редуцира до това на Yule-Simon [61]

$$(45) \quad p(\zeta = l \mid \zeta > 0) = \rho B(\rho + 1, l),$$

където B е бета-функцията.



Фигура 7: Различни форми на разпределението (11) и (34). Стойността на параметъра $\gamma_i = 0.01$ е фиксирана за всяко i . Фиг. (7a): Разпределение на Waring. ($\alpha_i = \alpha = 0.2$, $\beta_i = \beta = 0.3$) Фиг. (7b): $\alpha_i = (i+1)/(i+2)^2$, $\beta_i = (1+(-1)^i)/3$.

3. Разпределение на степените на върховете в модела на Barabasi и Albert.

Създадени са множество обобщения на модела на Barabasi и Albert [22], описващ алгоритъм за генериране на случайни безмашабни мрежи, използвайки принципа на линейното преференциално свързване. Следвайки Newman [62] и Krapivsky et al. [63] в този параграф е показано, че разпределението на степените на върховете в оригиналния модел, както и в редица негови обобщения са частен случай на получените в дисертацията разпределения.

Нека с $p_k(n)$ се обозначи частта от върхове със степен k когато мрежата има общо n върха и с всеки нов връх се появяват средно m нови дъги и

$$(46) \quad a_k = \alpha_{k-m} + (k-m)\beta_{k-m}, \quad \text{и} \quad \gamma = \mu/m; \quad k = m, m+1, \dots$$

Тогава при граничния преход $n \rightarrow \infty$ разпределението на степените придобива вида

$$(47) \quad \begin{aligned} P(\xi = m) &= \frac{\gamma}{\alpha_0 + \gamma}; \\ P(\xi = k) &= \frac{\gamma}{\alpha_0 + \gamma} \frac{\prod_{j=0}^{k-m-1} [\alpha_{k-m-j-1} + (k-m-j-1)\beta_{k-m-j-1}]}{\prod_{j=0}^{k-m-1} \alpha_{k-m-j} + (k-m-j)\beta_{k-m-j} + \gamma}, \\ k &= m+1, m+2, \dots \end{aligned}$$

където $\gamma > 0$ удовлетворява равенството

$$(48) \quad \sum_{i=m}^{\infty} \prod_{j=m}^i \frac{\alpha_{j-m} + (j-m)\beta_{j-m}}{\alpha_{j-m} + (j-m)\beta_{j-m} + \gamma} = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i \frac{\alpha_j + j\beta_j}{\alpha_j + j\beta_j + \gamma} = m.$$

(47) точно съвпада с плътността на вероятност на случайната величина $\zeta = \xi - m$, което от своя страна е частан случай на някои от получените до тук разпределения при $\gamma_i = \gamma$ за всяко i . С други думи (11) е разпределението на степените на върховете в обобщения модел на ВА ако вероятността за преференциално свързване е

$$(49) \quad p(j \rightarrow i) = \frac{\alpha_{k_i-m} + (k_i-m)\beta_{k_i-m}}{\sum_l [\alpha_{k_l-m} + (k_l-m)\beta_{k_l-m}]},$$

където m е средният брой ребра в мрежата, които се появяват с всеки нов връх.

Ще отбележим, че от горните разсъждения следва

$$(50) \quad E[\xi] = E[\zeta] + m,$$

където $E[X]$ е математическото очакване на случайната величина X .

По принцип е възможно да се получи пълното разпределение като уравнение (48) се реши относно γ и резултата се замести в (47). На практика обаче, (48) може да се реши точно в много редки случаи и често се прибегва до численото определяне на стойността на γ .

- Оригинален модел. При $\alpha_i/\beta_i = \alpha/\beta = m$ за всяко i (49) се редуцира до вероятността в стандартния модел $p(j \rightarrow i) = \frac{k_i}{\sum_i k_i}$. При тези условия $\gamma = 2\beta$ и следователно

$$(51) \quad \begin{aligned} P(\xi = m) &= \frac{2}{m+2}; \\ P(\xi = k) &= \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k = m+1, m+2, \dots, \end{aligned}$$

което е точния резултат на оригиналния модел.

- Разпределение в обобщен модел с начална атрактивност. Изолиран връх в модела на ВА не може да придобие ребро, защото вероятността за преференциално свързване към връх с $k = 0$ е нула. Този факт мотивира разглеждането на модел, при който вероятността за преференциално свързване е пропорционална на $A + k$, $A > 0$ [64].

Нека a и b са реални числа, такива че $a = \alpha_i/\beta_i = \alpha/\beta$, $b = \gamma_i/\beta_i = \gamma/\beta$ и $b > 1$, $a > 0$ за всяко i . Тогава, решението на уравнение (48)

$$(52) \quad b = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{a}{m} + 1 \quad \text{или} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{j=0}^i \frac{a+j}{a+b+j} = \frac{a}{b-1} = m,$$

$a > 0$, $b > 1$, $m > 0$. С други думи, първият момент на полученото от модела $p(j \rightarrow i) \propto a + i$ разпределение на Waring (43) е равен на средният брой ребра в мрежата m , които се появяват с всеки нов връх. Ако $a = ms$, $b = s + 1$ и $A = m(s - 1)$, т.е. $p(j \rightarrow i) = A + k = m(s - 1) + k$, то разпределението на степените на върховете е

$$(53) \quad P(i) = (1+s) \frac{\Gamma[(m+1)s+1]}{\Gamma(ms)} \frac{\Gamma(i+ms)}{\Gamma[i+2+(m+1)s]}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Същият резултат получават и Dorogovtsev et al. [64], използвайки различен подход. Индексът i в горния израз съзнателно не е заменен с $k = i + m$ за да получим точното разпределение от [64], което от своя страна е резултат от специфичния подход на авторите. Така че, чрез замяната $i = k - m$ окончателното разпределение придобива вида

$$(54) \quad P(k) = (1+s) \frac{\Gamma[(m+1)s+1]}{\Gamma(ms)} \frac{\Gamma[k+m(s-1)]}{\Gamma[k+2+m(s-1)+s]}, \quad k = m, m+1, \dots$$

В частност, при $s = 1$, което отговаря на случая $p(j \rightarrow i) \propto m(s-1) + k_i = k_i$ от (54) се получава точното разпределение от оригиналния модел на ВА.

От (50) и (52) следва, че средната степен на върховете в така генерираната мрежа е $\langle k \rangle = 2m$. От (54) и от свойствата на гама функцията следва, че разпределението не е чисто степенно, а има вида

$$P(k) = C(k+A)^{-\gamma}, \quad \gamma = 3 + \frac{A}{m} \geq 3$$

При големи k влиянието на A намалява и $P(k) \sim k^{-\gamma}$.

Глава 3. Мрежов канал с произволен брой рамена

В глава 3 се изгражда модел на специфично движение на вещество през върховете на мрежа, оформящо канал с произволен брой рамена, като разширение и обобщение на модела, разглеждан дотук (Фиг. 8а). В основата му е главно рамо (или корен) с което директно или чрез други рамена са свързани всички останали рамена. Веществото постъпва в мрежата само през един връх, наречен нулев или източник и започва своето движение като последователно преминава през редицата от съседни върхове (плътни окръжности), образувайки главното рамо на канал на движение. Ще бъде обсъден стационарния режим на функционирането на канала, при който количеството на постъпилото в дадена клетка вещество е равно на количеството на напусналото я. Интересът ще бъде фокусиран върху разпределението на количеството вещество в клетките на изследвания канал за случая на този стационарен режим, като са направени следните допускания:

- Всяка клетка от канала обменя вещество с два свои съседа, с изключение на източника, свързан само с един съсед и определен брой (краен или безкраен) специални клетки, свързани с три свои съседа. Това са клетките от дадено рамо, при достигането на които потокът вещество се разделя на две.
- Обмяната на вещество (движението) между клетките може да става само в една посока по протежение на канала, започвайки от източника и продължавайки последователно през съседни клетки по посока на нарастване на техния индекс.
- Част от веществото „изтича“ от канала към мрежата (или в околното пространство) чрез всяка негова клетка. „Изтичането“ е също само в една посока - от канала към мрежата.
- Веществото може да има предпочитание към някои от клетките на канала, т.е. каналът е проектиран по такъв начин, че веществото да има тенденция да се концентрира в някои от клетките му.

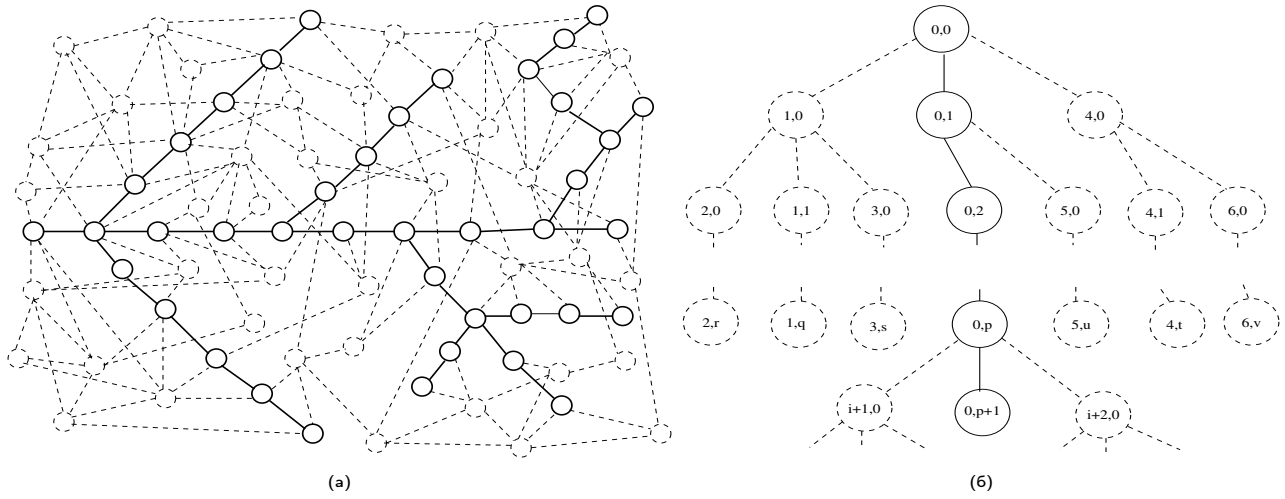
Използвана е следната конвенция за индексирание на върховете на канала (Фиг. 8б). С всеки връх \mathcal{N} от канала се асоциират четири индекса a, b, i и j : $\mathcal{N}_{i,j}^{a,b}$. Долните два индекса определят положението на върха върху дадено рамо, като i е номера на съответното рамо, а j е номера на върха върху рамото i . Горните индекси определят произхода на рамото i . Индексът a отразява номера на родителското рамо на i , т.е. на рамото от което чрез разклоняване се образува i , докато b е номера на клетката от a , в която се случва това разклоняване.

По смисъла на тази конвенция $a = 3, b = 8$ означава, че рамото i възниква от 8-та клетка на рамото 3. По този начин, $\mathcal{N}_{3,5}^{1,2}$ е 5-ия връх от рамото $i = 3$, което възниква от 2-рия връх на родителското за i рамо $a = 1$.

Върхът от който започва рамото i е обозначен като негов 0-ев връх. Този връх е първия след върха b от рамото a , в който рамото i възниква. По този начин, всеки връх от канала притежава уникална комбинация от индекси. Това е показано на Фиг. (8б), където 0-вият връх на рамото 1 се появява от 0-вия връх на 0-вото рамо (0-вия връх на 0-вото рамо е околното пространство, което доставя веществото до 0-вия връх на 1).

3.1. Мрежов канал с произволен брой безкрайни рамена

Математическо формулиране на задачата е направено в параграф 3.1. Всеки връх от дадено рамо се разглежда като клетка, а всяко рамо като безкрайна редица от клетки,



Фигура 8: Сложен канал, като част от мрежа с произволен брой рамена. Конвенция за индексирание върховете на мрежата, като са изобразени само долните индекси на върховете. Фиг. (8а): Върховете и ребрата, принадлежащи на на канала са изобразени с пълтни линии. Всички останали върхове и ребра на мрежата са изобразени с пунктирани линии. Фиг. (8б): Конвенция за индексирание върховете на мрежата, като са изобразени само долните индекси на върховете.

индексирани с последователни неотрицателни числа. Нека някакво количество вещество $x_q^{a_q, b_q}$ е разпределено по всички клетки на рамото q , което възниква от върха (a_q, b_q) и може да се движи от клетка в клетка. Нека $x_{q,i}^{a_q, b_q}$ е количеството вещество в i -тата клетка на рамото q . Тогава

$$(55) \quad x_q^{a_q, b_q} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{q,i}^{a_q, b_q}.$$

Съдържанието на вещество $x_{q,i}^{a_q, b_q}$ в i -тата клетка на рамото q на канала може да се променя вследствие на следните процеси:

1. Някакво количество $s_q^{a, b}$ вещество навлиза в рамото q от околното за него пространство през 0-та му клетка. Околното за рамото пространство може да бъде:

- (а) За главното рамо на канала (корена или рамото, обозначено $q = 0$): Веществото $s_0^{0,0}$ навлиза в главното рамо от пространството извън канала.
- (б) За рамо, различно от корена (т.е. с $q \neq 0$): Веществото $s_q^{a, b}$ е част от веществото, съдържащо се в клетката (a, b) на родителското за q рамо. Това вещество „изтича“ от родителското към съответното дъщерно рамо.

0-та клетка е единствената клетка на рамото q , в която веществото $s_q^{a, b}$ навлиза. В останалите клетки не постъпва вещество нито от околното за канала пространство, нито от другите рамена. Веществото $s_q^{a, b}$ навлиза единствено в 0-та клетка на рамото q .

2. Някакво количество вещество $f_{q,i}^{a, b}$ от $x_{q,i}^{a, b}$ се пренася от i -тата клетка към $(i + 1)$ -тата клетка на рамото q ;

3. Някакво количество вещество $g_{q,i}^{a, b}$ от $x_{q,i}^{a, b}$ изтича от i -тата клетка на рамото q към околното за рамото пространство. пространство. Това изтичане може да бъде два вида:

- (а) Изтичане към външно за целия канал пространство, което води до загуба на вещество от канала.

- (б) Изтичане към други рамена на канала. Изтичането е от клетката i на рамото q , като осигурява количеството вещество $s_p^{q,i}$ навлизащо в съответното дъщерно на p рамо.

Ще предположим, че процесът на движение на веществото е непрекъснат във времето. Следователно движението на вещество през върховете на рамото q може да се моделира математически чрез система обикновени диференциални уравнения:

$$(56) \quad \begin{aligned} \frac{dx_{q,0}^{a,b}}{dt} &= s_q^{a,b} - f_{q,0}^{a,b} - g_{q,0}^{a,b}, \\ \frac{dx_{i,q}^{a,b}}{dt} &= f_{q,i-1}^{a,b} - f_{q,i}^{a,b} - g_{q,i}^{a,b}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Съществуват два режима на функциониране на канала: стационарен и нестационарен. Ще бъде обсъждан само стационарният режим, при който $dx_{i,q}^{a,b}/dt = 0$, $i = 0, 1, \dots$. Ако с $*$ обозначим количеството вещество в стационарен режим, то от системата (56) се получава

$$(57) \quad f_{q,0}^{*a,b} = s_q^{*a,b} - g_{q,0}^{*a,b}; \quad f_{q,i}^{*a,b} = f_{q,i-1}^{*a,b} - g_{q,i}^{*a,b}$$

Ще приемем, че величините $s_q^{a,b}$, $f_{q,i}^{a,b}$ и $g_{q,i}^{a,b}$ в (56) имат следната форма ($\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \sigma_0$ са константи):

$$(58) \quad \begin{aligned} s_0^{0,0} &= \sigma_0 x_{0,0}^{0,0} > 0 \\ s_q^{a,b} &= \delta_q x_{a,b}^{c,d}; \quad 1 \geq \delta_q \geq 0 \\ f_{q,i}^{a,b} &= (\alpha_{q,i}^{a,b} + i\beta_{q,i}^{a,b})x_{q,i}^{a,b}; \quad 1 > \alpha_{q,i}^{a,b} > 0, \quad 1 \geq \beta_{q,i}^{a,b} \geq 0 \\ g_{q,i}^{a,b} &= \gamma_{q,i}^{*a,b} x_{q,i}^{a,b}; \quad 1 \geq \gamma_{q,i}^{*a,b} \geq 0 \rightarrow \text{non-uniform leakage in the nodes.} \end{aligned}$$

Индексите c и d във второто от горните уравнения се отнася до родителското за q рамо (обозначено с c) и родителския връх на това рамо (обозначен с d). $\beta_{q,i}^{a,b}$ отчита факторите, които водят до по-бързото напускане на клетката i от веществото. Величината

$$(59) \quad \gamma_{q,i}^{*a,b} = \gamma_{q,i}^{a,b} + \sum_{p \in (q,i)} \delta_{p,q,i}^{a,b}$$

описва начина по който веществото напуска клетката. $\gamma_{q,i}^{a,b}$ отразява изтичането от клетката i на рамото q към околното за канала пространство, докато $\delta_{p,q,i}^{a,b}$ описва изтичането към клетките, които се разклоняват от i -тата клетка на рамото q . Обозначението $p \in (q, i)$ в сумата по-горе означава всички клетки, възникващи от клетката (q, i) .

На база на всичко казано до тук, системата от обикновени диференциални уравнения за рамото q добива вида

$$(60) \quad \begin{aligned} \frac{dx_{q,0}^{a,b}}{dt} &= s_q^{a,b} - \alpha_{q,0}^{a,b} x_{q,0}^{a,b} - \gamma_{q,0}^{*a,b} x_{q,0}^{a,b}, \\ \frac{dx_{q,i}^{a,b}}{dt} &= [\alpha_{q,i-1}^{a,b} + (i-1)\beta_{q,i-1}^{a,b}]x_{q,i-1}^{a,b} - (\alpha_{q,i}^{a,b} + i\beta_{q,i}^{a,b} + \gamma_{q,i}^{*a,b})x_{q,i}^{a,b}; \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

По принцип, решенията на системата (60) са

$$(61) \quad x_{q,i}^{a,b} = x_{q,i}^{*a,b} + \sum_{j=0}^i b_{q,i,j}^{a,b} \exp[-(\alpha_{q,j}^{a,b} + j\beta_{q,j}^{a,b} + \gamma_{q,j}^{*a,b})t], \quad i = 1, 2, \dots,$$

където $x_{q,i}^{*a,b}$ е стационарната част на решението. Поради неотрицателните стойности на параметрите α, β и γ , с нарастване на времето стойността на $x_{q,i}^{a,b}$ се стреми към $x_{q,i}^{*a,b}$.

Стационарен режим на функциониране на канала В параграф **3.1.2** е обсъдена ситуацията с достигане на стационарен режим в целия канал. Тогава $dx_0^q/dt = 0$ и от (60) следва

$$(62) \quad x_{q,0}^{*a,b} = \frac{s_q^{a,b}}{\alpha_{0,q}^{a,b} + \gamma_{0,q}^{*a,b}} .$$

За корена на канала (рамото 0), чрез заместване на израза за $s_0^{0,0}$ от (58) в (62) се получава, че $x_{0,0}^{0,0}$ е свободен параметър и освен това

$$\sigma_0 = \alpha_{0,0}^{0,0} + \gamma_{0,0}^{*,0,0} .$$

За рамото r , което възниква от клетката m на рамото q , $dx_{r,0}^{q,m}/dt = 0$ и следователно от уравненията на модела по-горе се получава

$$(63) \quad x_{r,0}^{*q,m} = \frac{\delta_{r,q,m}^{a,b}}{\alpha_{r,0}^{q,m} + \gamma_{r,0}^{q,m}} x_{q,m}^{*c,d} .$$

За $x_{q,i}^{*a,b}$ чрез заместване на $dx_{q,i}^{a,b}/dt = 0$ в (60) се получава зависимостта ($i = 1, 2, \dots$)

$$(64) \quad x_{q,i}^{*a,b} = \frac{\alpha_{q,i-1}^{a,b} + (i-1)\beta_{q,i-1}^{a,b}}{\alpha_{q,i}^{a,b} + i\beta_{q,i}^{a,b} + \gamma_{q,i}^{*a,b}} x_{q,i-1}^{*a,b}, \quad \text{или} \quad x_{q,i}^{*a,b} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} x_{q,0}^{*a,b}$$

b_{ij}^q са ($i = 1, \dots$) са коефициенти, зависещи от параметрите на рамената.

Вероятностно разпределение свързано със стационарния поток. Отношението $y_{q,i}^{*a_q,b_q} = x_{q,i}^{*a_q,b_q} / x_q^{*a_q,b_q}$ може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на дискретна случайна величина ζ_q , свързана със съответното рамо

$$(65) \quad y_{q,i}^{*a_q,b_q} = p_q^{a_q,b_q}(\zeta_q = i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Могат да бъде дефинирани и други разпределения, като разпределението на веществото в целия канал. Общото количество вещество в този случай е

$$(66) \quad x^* = \sum_{q=0}^M x_q^{*a_q,b_q} = \sum_{q=0}^M \sum_{i=0}^{\infty} x_{q,i}^{*a_q,b_q},$$

където $M + 1$ е броя рамена в канала (поради главното рамо, обозначено с 0). Съответното разпределение на веществото в канала ще бъде съответно

$$(67) \quad z_{q,i}^{*a_q,b_q} = \frac{x_{q,i}^{*a_q,b_q}}{x^*} .$$

Общото количество вещество в клетките на рамото q е

$$(68) \quad x_q^{*a,b} = \sum_{i=0}^{\infty} x_{q,i}^{*a,b} = x_{q,0}^{*a,b} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} x_{q,0}^{*a,b} .$$

Видът на съответното вероятностно разпределение $y_{q,i}^{*a,b} = x_{q,i}^{*a,b}/x_q^{*a,b}$ (където $x_q^{*a,b}$ е количеството вещество във всички клетки на рамото) е получено в параграф **3.1.3** и е ($i = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned}
y_{q,0}^{*a,b} &= 1 / \left(1 + \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b}]} \right) \\
y_{q,i}^{*a,b} &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b}]} / \left(1 + \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b}]} \right)
\end{aligned}
\tag{69}$$

Доколкото ни е известно, разпределението, представено чрез (69) не е обсъждано до сега извън нашата изследователска група. С други думи, това е ново вероятностно разпределение.

3.2. Мрежов канал с произволен брой крайни рамена

Математическо формулиране на задачата е направено в параграф **3.2.1**. Разгледан е случай на канал, изграден от главно рамо 0 и M други рамена. Рамото q от канала е съставено от краен брой клетки $N_q + 1$ номерирани от 0 до N_q .

Каналът е изграден по същия начин като безкраен канал, като единствената разлика е в крайния брой на клетките на всяко от двете рамена. Следователно, за нулевата клетка и клетките $1, 2, \dots, N_q - 1$ моделът се описва със системата уравнения (60) за всяко от рамената на канала

$$\begin{aligned}
(70) \quad \frac{dx_{q,0}^{a,b}}{dt} &= s_q^{a,b} - \alpha_{q,0}^{a,b} x_{q,0}^{a,b} - \gamma_{q,0}^{*a,b} x_{q,0}^{a,b}, \\
\frac{dx_{q,i}^{a,b}}{dt} &= [\alpha_{q,i-1}^{a,b} + (i-1)\beta_{q,i-1}^{a,b}] x_{q,i-1}^{a,b} - (\alpha_{q,i}^{a,b} + i\beta_{q,i}^{a,b} + \gamma_{q,i}^{*a,b}) x_{q,i}^{a,b}, \\
& \quad i = 1, 2, \dots, N_q - 1.
\end{aligned}$$

В клетката N_q от рамото q няма изтичане към следваща клетка тъй като тя е последна за него. Следователно, уравнението, управляващо движението на веществото в тази клетка е

$$(71) \quad \frac{dx_{q,N}^{a,b}}{dt} = [\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q - 1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}] x_{q,N_q-1}^{a,b} - \gamma_{q,N_q}^{*a,b} x_{q,N_q}^{a,b}.$$

Стационарен режим на функциониране на канала В параграф 3.2.2 е обсъден стационарният случай на движение на веществото през рамената на изучавания канал. Тогава в уравнението (70) $dx_0^q/dt = 0$ и следователно

$$(72) \quad x_{q,0}^{*a,b} = \frac{s_q^{a,b}}{\alpha_{0,q}^{a,b} + \gamma_{0,q}^{*a,b}} .$$

За главното рамо (рамото 0) чрез заместване на $s_0^{0,0}$ от уравнението (58) в (72) се получава, че $x_{0,0}^{0,0}$ е свободен параметър и освен това

$$\sigma_0 = \alpha_{0,0}^{0,0} + \gamma_{0,0}^{*0,0} .$$

За рамото r , което възниква от клетката m на рамото q , $dx_{r,0}^{q,m}/dt = 0$ и следователно от уравненията на модела по-горе се получава

$$(73) \quad x_{r,0}^{*q,m} = \frac{\delta_{r,q,m}^{a,b}}{\alpha_{r,0}^{q,m} + \gamma_{r,0}^{q,m}} x_{q,m}^{*c,d} .$$

За $x_{q,i}^{*a,b}$ чрез заместване на $dx_{q,i}^{a,b}/dt = 0$ в (70) се получава зависимостта ($i = 1, 2, \dots, N_q - 1$)

$$(74) \quad x_{q,i}^{*a,b} = \frac{\alpha_{q,i-1}^{a,b} + (i-1)\beta_{q,i-1}^{a,b}}{\alpha_{q,i}^{a,b} + i\beta_{q,i}^{a,b} + \gamma_{q,i}^{*a,b}} x_{q,i-1}^{*a,b}, \quad \text{или} \quad x_{q,i}^{*a,b} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} x_{q,0}^{*a,b} .$$

Използвайки (71) лесно се получава израз за $x_{q,N_q}^{*a,b}$

$$(75) \quad x_{q,N_q}^{*a,b} = \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} x_{q,0}^{*a,b} .$$

Вероятностно разпределение, свързано със стационарния поток В параграф 3.2.3 са обсъдени няколко възможни разпределения на веществото, свързани с движение на веществото през канала.

Отношението $y_{q,i}^{*a_q,b_q} = x_{q,i}^{*a_q,b_q} / x_{q,0}^{*a_q,b_q}$ може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на дискретна случайна величина ζ_q , свързана със съответното рамо

$$(76) \quad y_{q,i}^{*a_q,b_q} = p_q^{a_q,b_q}(\zeta_q = i), \quad i = 0, 1, \dots$$

Общото количество вещество в рамото q ($x_q^{*,a,b} = x_{q,0}^{*,a,b} + x_{q,i}^{*,a,b} + x_{q,N}^{*,a,b}$) е

$$(77) \quad x_q^{*,a,b} = x_{q,0}^{*,a,b} \left\{ 1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} + \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} \right\} .$$

Вероятностното разпределение, свързано с клетките на рамото q е ($i = 1, \dots, N_q - 1$)

$$\begin{aligned}
 y_{q,0}^{*a,b} &= 1 / \\
 &\left\{ 1 + \frac{\prod_{j=0}^{N_q-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} + \right. \\
 &\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} \right\}, \\
 y_{q,i}^{*a,b} &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} / \\
 &\left\{ 1 + \frac{\prod_{j=0}^{N_q-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} + \right. \\
 &\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} \right\} \\
 y_{q,N_q}^{*a,b} &= \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} / \\
 &\left\{ 1 + \frac{\prod_{j=0}^{N_q-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} + \right. \\
 &\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]} \right\}.
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

Дефинирано е и друго вероятностно разпределение, като отношение на количеството вещество в дадена клетка, независимо от кое рамо към общото количество вещество в целия

канал, т.е. за всичките M рамена на канала. Тогава общото количество вещество в този случай е

$$(79) \quad x^* = \sum_{q=0}^M x_q^{*a_q, b_q},$$

където $M + 1$ е броя рамена в канала (поради главното рамо, обозначено с 0). Съответното разпределение на веществото в канала ще бъде съответно

$$(80) \quad z_{q,i}^{*a_q, b_q} = \frac{x_{q,i}^{*a_q, b_q}}{x^*}$$

$$(81) \quad x^* = \sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q, b_q} + \sum_{i=1}^{N_q-1} x_{q,i}^{*a_q, b_q} + x_{q,N_q}^{*a_q, b_q} \right] =$$

$$\sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q, b_q} \left(1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a_q, b_q} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a_q, b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a_q, b_q} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a_q, b_q} + \gamma_{q,i-j}^{*a_q, b_q} \right]} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a_q, b_q} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a_q, b_q}}{\gamma_{q,N_q}^{*a_q, b_q}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a_q, b_q} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a_q, b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a_q, b_q} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a_q, b_q} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a_q, b_q} \right]} \right) \right].$$

Тогава, вероятностното разпределение във входните (нулеви) клетки на рамената ($p = 0, \dots, M$) на канала е

$$(82) \quad z_{p,0}^{*a_p, b_p} = \frac{x_{p,0}^{*a_p, b_p}}{\sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q, b_q} + x_{q,i}^{*a_q, b_q} + x_{q,N}^{*a_q, b_q} \right]}$$

ИЛИ СЪОТВЕТНО

$$(83) \quad z_{p,0}^{*a_p, b_p} = x_{p,0}^{*a_p, b_p} /$$

$$\sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q, b_q} \left(1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a_q, b_q} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a_q, b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a_q, b_q} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a_q, b_q} + \gamma_{q,i-j}^{*a_q, b_q} \right]} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a_q, b_q} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a_q, b_q}}{\gamma_{q,N_q}^{*a_q, b_q}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a_q, b_q} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a_q, b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a_q, b_q} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a_q, b_q} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a_q, b_q} \right]} \right) \right]$$

Вероятностното разпределение за вътрешните клетки на рамената ще бъде

$$\begin{aligned}
z_{p,i}^{*a_p,b_p} &= \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{p,i-j-1}^{a_p,b_p} + (i-j-1)\beta_{p,i-j-1}^{a_p,b_p} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{p,i-j}^{a_p,b_p} + (i-j)\beta_{p,i-j}^{a_p,b_p} + \gamma_{p,i-j}^{*a_p,b_p} \right]} x_{p,0}^{*a_p,b_p} / \\
&\sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q,b_q} \left(1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a_q,b_q} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a_q,b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a_q,b_q} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a_q,b_q} + \gamma_{q,i-j}^{*a_q,b_q} \right]} \right) + \right. \\
(84) \quad &\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a_q,b_q} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a_q,b_q}}{\gamma_{q,N_q}^{*a_q,b_q}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a_q,b_q} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a_q,b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a_q,b_q} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a_q,b_q} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a_q,b_q} \right]} \right) \Bigg].
\end{aligned}$$

Вероятностното разпределение за последните клетки от раменете на канала ще бъде съответно

$$\begin{aligned}
z_{p,N_p}^{*a_p,b_p} &= \frac{\alpha_{p,N_p-1}^{a_p,b_p} + (N_p-1)\beta_{p,N_p-1}^{a_p,b_p}}{\gamma_{p,N_p}^{*a_p,b_p}} \frac{\prod_{j=0}^{N_p-2} \left[\alpha_{p,N_p-j-2}^{a_p,b_p} + (N_p-j-2)\beta_{p,N_p-j-2}^{a_p,b_p} \right]}{\prod_{j=0}^{N_p-2} \left[\alpha_{p,N_p-j-1}^{a_p,b_p} + (N_p-j-1)\beta_{p,N_p-j-1}^{a_p,b_p} + \gamma_{p,N_p-j-1}^{*a_p,b_p} \right]} x_{p,0}^{*a_p,b_p} / \\
&\sum_{q=0}^M \left[x_{q,0}^{*a_q,b_q} \left(1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a_q,b_q} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a_q,b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a_q,b_q} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a_q,b_q} + \gamma_{q,i-j}^{*a_q,b_q} \right]} \right) + \right. \\
(85) \quad &\left. \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a_q,b_q} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a_q,b_q}}{\gamma_{q,N_q}^{*a_q,b_q}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a_q,b_q} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a_q,b_q} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a_q,b_q} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a_q,b_q} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a_q,b_q} \right]} \right) \Bigg].
\end{aligned}$$

Доколкото ни е известно, разпределенията, представени чрез (78) и (83) - (85) не са обсъждани до сега извън нашата изследователска група. С други думи, това са нови вероятностни разпределения.

3.3. Безкраен, ляво ориентиран канал.

В параграф 3.3 е разгледан опростен модел на разглеждания дотук като се описва канал, съставен от безкрайна верига от рамена, такива че всяко рамо има само един наследник и един родител (с изключение на главното рамо, което няма родител). Рамената могат еднозначно да бъдат определени от множеството на целите неотрицателни числа $q = 0, 1, \dots$, като $q = 0$ определя главното рамо на канала. Следователно, i -тата клетка от рамото $q + 1$ на канала може да бъде обозначена като $\mathcal{N}_{q+1,i}^{q,n_{q+1}}$, където n_{q+1} е номера на клетката на рамото q , в която то се разклонява и дава началото на рамото $q + 1$.

В този случай може да бъде дефинирано и друго вероятностно разпределение

$$(86) \quad P(\zeta = q) = x_q^*/x^*,$$

като отношение на количеството вещество в дадено рамо x_q^* към общото количество вещество x в целия канал, т.е. за всичките рамена на канала. При стационарен режим, общото количество вещество x_q^* в клетките на рамото q е (68) и имайки предвид, че общото количество вещество в канала е $x^* = \sum_{q=0}^{\infty} x_q^*$ то

$$(87) \quad P(\zeta = q) = x_{q,0}^* \left(1 + \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j} + (i-j)\beta_{q,i-j} + \gamma_{q,i-j}^*]} \right) / \sum_{q=0}^{\infty} \left[x_{q,0}^* \left(1 + \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j} + (i-j)\beta_{q,i-j} + \gamma_{q,i-j}^*]} \right) \right],$$

където количеството вещество в нулевата клетка $x_{q,0}^*$ на канала q лесно може да се получи като се има предвид (63) ($q = 1, 2, \dots$):

$$(88) \quad x_{q,0}^* = x_{0,0}^* \prod_{r=0}^{q-1} \left(\frac{\delta_{q-r-1, n_{q-r}} \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r, i-j-1} + (i-j-1)\beta_{q-r, i-j-1}]}{\alpha_{q-r,0} + \gamma_{q-r,0} \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r, i-j} + (i-j)\beta_{q-r, i-j} + \gamma_{q-r, i-j}^*]} \right).$$

Чрез заместване в (87) окончателно се получава израз за вероятността (86). Този израз е твърде дълъг и няма да бъде изписан тук.

Разглежда се частен случай на това разпределение, при който $\gamma_{q,i} = \gamma$ за всяко q и i . Системата диференциални уравнения (60), управляващи количеството вещество в рамото $q = 0, 1, \dots$ добива вида ($i = 1, 2, \dots, n_{q+1} - 1, n_{q+1} + 1, n_{q+1} + 2, \dots$)

$$(89) \quad \begin{aligned} \frac{dx_{q,0}}{dt} &= \delta_q x_{q-1, n_q} - \alpha_{q,0} x_{q,0} - \gamma x_{q,0}; \\ \frac{dx_{q, n_{q+1}}}{dt} &= [\alpha_{q, n_{q+1}-1} + (n_{q+1} - 1)\beta_{q, n_{q+1}-1}] x_{q, n_{q+1}-1} - \\ &\quad (\alpha_{q, n_{q+1}} + n_{q+1}\beta_{q, n_{q+1}} + \gamma) x_{q, n_{q+1}} - \delta_{q+1} x_{q, n_{q+1}}; \\ \frac{dx_{q,i}}{dt} &= [\alpha_{q, i-1} + (i-1)\beta_{q, i-1}] x_{q, i-1} - (\alpha_{q,i} + i\beta_{q,i} + \gamma) x_{q,i}; \end{aligned}$$

Чрез сумиране на всички уравнения (89) по i се получава, че в стационарния случай е изпълнено

$$(90) \quad \gamma x_q^* = \delta_q x_{q-1, n_q}^* - \delta_{q+1} x_{q, n_{q+1}}^*$$

и използвайки, че от първите уравнения на (89) при стационарен режим следва равенството

$$\delta_q x_{q-1, n_q}^* = (\alpha_{q,0} + \gamma) x_{q,0}^*,$$

за количеството вещество в рамото q се получава

$$(91) \quad x_q^* = \frac{\alpha_{q,0} + \gamma}{\gamma} x_{q,0}^* - \frac{\delta_{q+1}}{\gamma} x_{q,n_{q+1}}^* = \left(\frac{\frac{\alpha_{q,0} + \gamma}{\gamma} - \frac{\delta_{q+1}}{\gamma} \frac{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j-1} + (n_{q+1} - j - 1)\beta_{q,n_{q+1}-j-1}]}{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j} + (n_{q+1} - j)\beta_{q,n_{q+1}-j} + \gamma^*]}}{\frac{\alpha_{q,0} + \gamma}{\gamma} - \frac{\delta_{q+1}}{\gamma} \frac{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j-1} + (n_{q+1} - j - 1)\beta_{q,n_{q+1}-j-1}]}{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j} + (n_{q+1} - j)\beta_{q,n_{q+1}-j} + \gamma^*]}} \right) x_{q,0}^*.$$

Израз за количеството вещество в целия канал при частния случай $\gamma_{q,i} = \gamma$ за всяко q и i в стационарен режим може да се получи чрез сумиране на всички уравнения от (89) по всички рамена q на канала

$$(92) \quad x^* = \frac{\alpha_{0,0} + \gamma}{\gamma} x_{0,0}^*,$$

където количеството вещество в нулевата клетка на главното рамо $x_{0,0}^*$ е свободен параметър. Трябва да се отбележи, че в този частен случай, количеството вещество в целия канал зависи само от стойността на параметрите $\alpha_{0,0}$ и γ . Промяната на всички останали параметри води единствено до преразпределение на вещество между клетките и рамената на канала, като общото количество остава постоянно. Като се имат предвид изразите (88), (91) и (92), разпределението (87) придобива вида ($q = 1, 2, \dots$)

$$(93) \quad P(\zeta = 0) = 1 - \frac{\delta_1 \prod_{j=0}^{n_1-1} [\alpha_{0,n_1-j-1} + (n_1 - j - 1)\beta_{0,n_1-j-1}]}{\alpha_{0,0} + \gamma \prod_{j=0}^{n_1-1} [\alpha_{0,n_1-j} + (n_1 - j)\beta_{0,n_1-j} + \gamma^*]}.$$

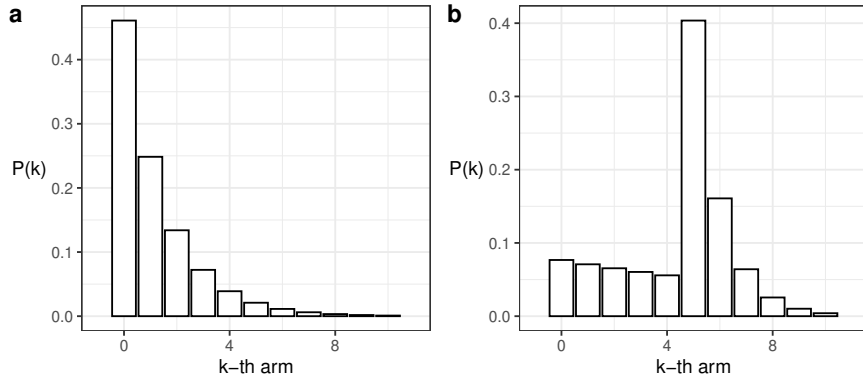
$$(94) \quad P(\zeta = q) = \left(\frac{\frac{\alpha_{q,0} + \gamma}{\alpha_{0,0} + \gamma} - \frac{\delta_{q+1}}{\alpha_{0,0} + \gamma} \frac{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j-1} + (n_{q+1} - j - 1)\beta_{q,n_{q+1}-j-1}]}{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j} + (n_{q+1} - j)\beta_{q,n_{q+1}-j} + \gamma^*]}}{\frac{\alpha_{q,0} + \gamma}{\alpha_{0,0} + \gamma} - \frac{\delta_{q+1}}{\alpha_{0,0} + \gamma} \frac{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j-1} + (n_{q+1} - j - 1)\beta_{q,n_{q+1}-j-1}]}{\prod_{j=0}^{n_{q+1}-1} [\alpha_{q,n_{q+1}-j} + (n_{q+1} - j)\beta_{q,n_{q+1}-j} + \gamma^*]}} \right) \times \prod_{r=0}^{q-1} \left(\frac{\delta_{q-r-1,n_{q-r}} \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r,i-j-1} + (i - j - 1)\beta_{q-r,i-j-1}]}{\alpha_{q-r,0} + \gamma \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r,i-j} + (i - j)\beta_{q-r,i-j} + \gamma^*]} \right).$$

При още по-силните условия $n_q = n$, $\alpha_{q,i} = \alpha_i$, $\beta_{q,i} = \beta_i$ и $\delta_q = \delta$ за всяко $q = 0, 1, \dots$ и всяко $i = 0, 1, \dots$ разпределението (94) се редуцира до геометрично разпределение

$$(95) \quad P(\zeta = k) = q^k p, \quad k = 0, 1, \dots$$

където

$$(96) \quad p = 1 - \frac{\delta \prod_{j=0}^{n-1} [\alpha_{n-j-1} + (n - j - 1)\beta_{n-j-1}]}{\alpha_0 + \gamma \prod_{j=0}^{n-1} [\alpha_{n-j} + (n - j)\beta_{n-j} + \gamma^*]}$$



Фигура 9: Разпределение на веществото по рамена в безкрайна редица от рамена, описано от (94). Фиг. (9a): Геометрично разпределение (95). Параметрите $\alpha_i = 0.5$, $\beta_i = 0.1$ и $\gamma_i = 0.01$ са фиксирани за всички клетки и рамена. Параметрите $d_{q,i} = 0$ за всяко i с изключение на $d_{q,4} = 0.9$ за всяко q . Фиг. (9b): Параметрите $\alpha_i = 0.5$, $\beta_i = 0.1$ и $\gamma_i = 0.01$ са фиксирани за всички клетки и рамена с изключение на $\alpha_{q,4} = \beta_{q,4} = 0.01$ за $q \in [0, 4]$. Параметрите $d_{q,i} = 0$ за всяко i с изключение на $d_{q,4} = 0.9$ за $q \in [0, 4]$ и $d_{q,4} = 0.5$ за $q > 4$.

Може да бъде дефинирано и друго вероятностно разпределение. Нека със z обозначим сумата $z_i = \sum_{q=0}^{\infty} x_{q,i}^*$. Тогава отношението

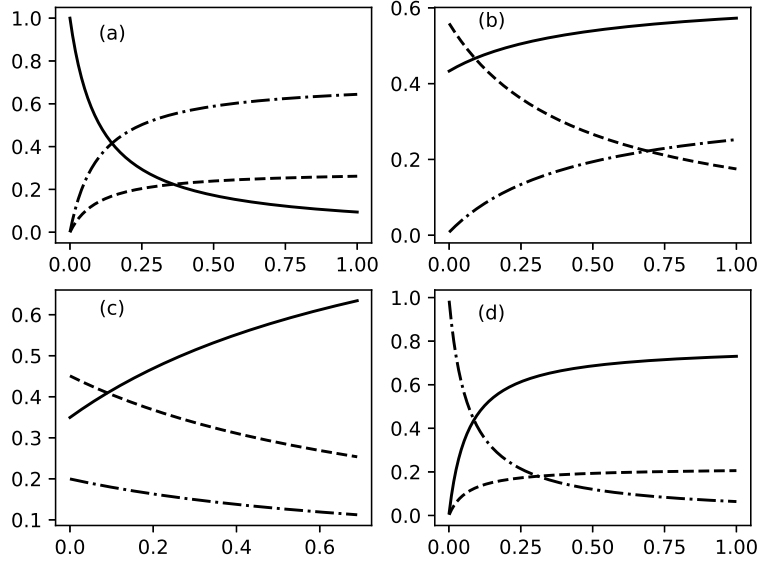
$$p(\xi = i) = z_i/z, \quad \text{където } z = \frac{\alpha_{0,0} + \gamma}{\gamma} x_{0,0}^*$$

е общото количество вещество в канала, може да бъде разглеждано като вероятностни стойности на разпределение на случайна дискретна величина ξ . Тогава

$$\begin{aligned}
 p(\xi = i) = & \frac{\gamma}{\alpha_{0,0} + \gamma} \left\{ \frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{0,i-j-1} + (i-j-1)\beta_{0,i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{0,i-j} + (i-j)\beta_{0,i-j} + \gamma^*]} + \right. \\
 & \sum_{q=1}^{\infty} \left[\frac{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j-1} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}]}{\prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{q,i-j} + (i-j)\beta_{q,i-j} + \gamma^*]} \times \right. \\
 & \left. \left. \prod_{r=0}^{q-1} \left(\frac{\delta_{q-r-1, n_{q-r}} \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r,i-j-1} + (i-j-1)\beta_{q-r,i-j-1}]}{\alpha_{q-r,0} + \gamma \prod_{j=0}^{n_{q-r}-1} [\alpha_{q-r,i-j} + (i-j)\beta_{q-r,i-j} + \gamma^*]} \right) \right] \right\}, \\
 (97) \quad & k = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

При частния случай $n_q = n$, $\alpha_{q,i} = \alpha_i$, $\beta_{q,i} = \beta_i$ и $\delta_q = \delta$ за всяко $q = 0, 1, \dots$ и всяко $i = 0, 1, \dots$ разпределението (97) се редуцира до

$$(98) \quad p(\xi = i) = \frac{\gamma \prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j-1} + (i-j-1)\beta_{i-j-1}]}{\alpha_0 + \gamma - \delta \frac{\prod_{j=0}^{n-1} [\alpha_{n-j-1} + (n-j-1)\beta_{n-j-1}]}{\prod_{j=0}^{n-1} [\alpha_{n-j} + (n-j)\beta_{n-j} + \gamma^*]} \prod_{j=0}^{i-1} [\alpha_{i-j} + (i-j)\beta_{i-j} + \gamma^*]}$$



Фигура 10: Вероятностните p_0 (плътна линия), p_1 (пунктирна линия) и p_2 (точкова пунктирна линия) като функция на избрани параметри. Фиг. (10a): $p_0(\alpha_0)$, $p_1(\alpha_0)$; $p_2(\alpha_0)$ за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_1 = 0.04$, $\beta_1 = 0.28$, $\gamma_1^* = 0.04$, $\gamma_2^* = 0.13$. Фиг. (10b): $p_0(\alpha_1)$, $p_1(\alpha_1)$; $p_2(\alpha_1)$ за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.4$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.3$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (10c): $p_0(\gamma_1^*)$, $p_1(\gamma_1^*)$; $p_2(\gamma_1^*)$ за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (10d): $p_0(\gamma_2^*)$, $p_1(\gamma_2^*)$; $p_2(\gamma_2^*)$ за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.4$.

3.4. Получените разпределения в контекста на теория на информацията.

Могат да бъдат изчислени множество величини, свързани с получените разпределения като математическото очакване, дисперсията и др. В този параграф са дискутирани някои въпроси, в контекста на информационната теория.

Нека разгледаме поток от вещество в обсъждания по-горе канал в мрежа. Нека във всяка клетка от канала се случва някакво събитие и нека вероятността за това събитие да е пропорционална на количеството вещество в съответната клетка. Тогава вероятността за реализирането на събитие в дадена клетка от канала ще е равна на съответната стойност на вероятностното разпределение. И понеже това разпределение е известно, лесно може да се изчисли информацията за всяко от поредицата елементарни събития, както и ентропията на случайната величина, свързана с вероятностното разпределение

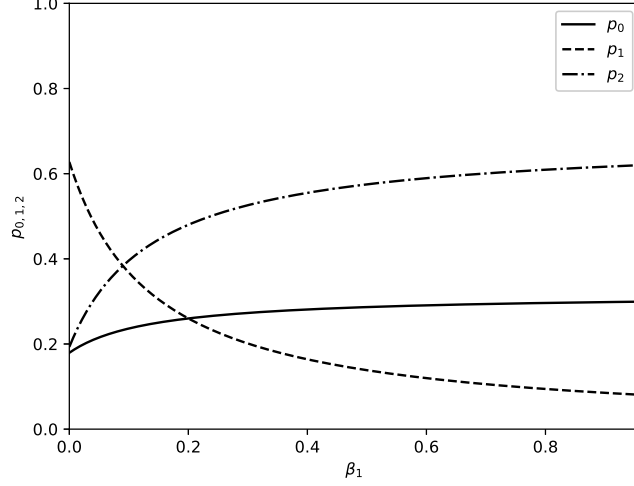
Информацията за елементарно събитие се определя като логаритъм от реципрочната стойност на вероятността на събитието p

$$(99) \quad I(p) = -\log(p),$$

а ентропията на случайната величина, (или ентропия на Шанън, равна на средната стойност на информацията на елементарните събития), свързана с вероятностното разпределение $P = (p_0, \dots, p_N)$ се определя като

$$(100) \quad H(P) = -\sum_{i=0}^N p_i \log(p_i)$$

Нека разгледаме разпределението P^* на веществото в рамото q на канала, давано от (78). За простота нека обозначим с A_q израза



Фигура 11: Вероятностите $p_0(\beta_1)$ (плътна линия), $p_1(\beta_1)$ (пунктирна линия), и $p_2(\beta_1)$ (точкова пунктирна линия) като функция на β_1 когато всички останали параметри са фиксирани: $\alpha_0 = 0.28$, $\alpha_1 = 0.04$, $\gamma_1^* = 0.04$, $\gamma_2^* = 0.13$.

$$(101) \quad A_q = 1 + \sum_{i=1}^{N_q-1} \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]} + \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]},$$

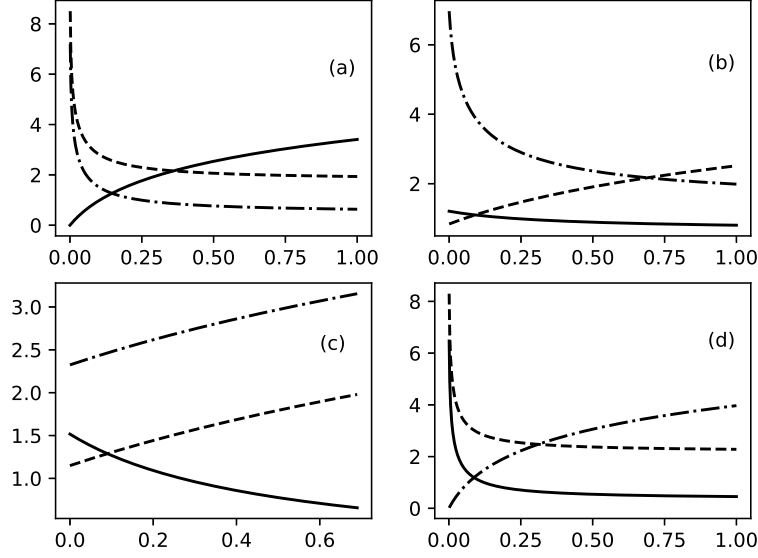
а с $B_{q,i}$ и B_{q,N_q} съответно

$$(102) \quad B_{q,i} = \frac{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j-1}^{a,b} + (i-j-1)\beta_{q,i-j-1}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{i-1} \left[\alpha_{q,i-j}^{a,b} + (i-j)\beta_{q,i-j}^{a,b} + \gamma_{q,i-j}^{*a,b} \right]}$$

$$B_{q,N_q} = \frac{\alpha_{q,N_q-1}^{a,b} + (N_q-1)\beta_{q,N_q-1}^{a,b}}{\gamma_{q,N_q}^{*a,b}} \frac{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-2}^{a,b} + (N_q-j-2)\beta_{q,N_q-j-2}^{a,b} \right]}{\prod_{j=0}^{N_q-2} \left[\alpha_{q,N_q-j-1}^{a,b} + (N_q-j-1)\beta_{q,N_q-j-1}^{a,b} + \gamma_{q,N_q-j-1}^{*a,b} \right]}$$

С други думи $y_{q,0}^{*a,b} = 1/A_q$, $y_{q,i}^{*a,b} = B_{q,i}/A_q$ и $y_{q,N_q}^{*a,b} = B_{q,N_q}/A_q$. В тези означения информацията за елементарното събитие с вероятност p_i (за i -тата клетка на това рамо) е

$$(103) \quad \begin{aligned} I(p_0) &= \log(A_q) \\ I(p_i) &= \log(A_q) - \log(B_{q,i}), \quad i = 1, \dots, N_q - 1 \\ I(p_N) &= \log(A_q) - \log(B_{q,N_q}) \end{aligned}$$



Фигура 12: Информацията за елементарните събития $I(p_0)$ (плътна линия), $I(p_1)$ (пунктирна линия) и $I(p_2)$ (точкова пунктирна линия) като функция на избрани параметри. Фиг. (12a): Зависимостта на $I(p_0)$, $I(p_1)$; $I(p_2)$ от α_0 за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_1 = 0.04$, $\beta_1 = 0.28$, $\gamma_1^* = 0.04$, $\gamma_2^* = 0.13$. Фиг. (12b): Зависимостта на $I(p_0)$, $I(p_1)$; $I(p_2)$ от α_1 за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.4$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.3$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (12c): Зависимостта на $I(p_0)$, $I(p_1)$; $I(p_2)$ от γ_1^* за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (12d): Зависимостта на $I(p_0)$, $I(p_1)$; $I(p_2)$ от γ_2^* за фиксирани стойности на параметрите $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.4$.

Съответната информация на Шанън за разпределението P^* е

$$H(P^*) = \frac{\log(A_q)}{A_q} - \sum_{i=1}^{N_q-1} \log\left(\frac{B_{q,i}}{A_q}\right) - \frac{B_{q,N_q}}{A_q} \log\left(\frac{B_{q,N_q}}{A_q}\right)$$

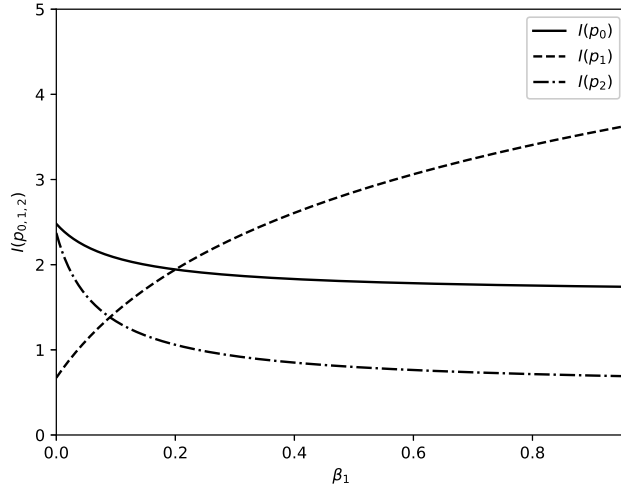
Да разгледаме най-лесния възможен случай: канал, изграден от едно рамо със само три клетки и да изпишем изразите за $I(p)$ за върховете му, както и съответната ентропия на Шанън за този канал. Тук, индексите a , b и q ще бъдат изпуснати. В така описания случай $N_q = N = 2$, номерата на клетките от рамото са 0, 1 и 2, а съответните стойности на вероятността ще бъдат

$$(104) \quad \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*}\right)}, \\ p_1 &= \frac{\frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*}}{1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*}\right)}, \\ p_2 &= \frac{\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*}}{1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*}\right)}. \end{aligned}$$

Параметрите в (104) управляват следните процеси в канала

- α_0 ($0 < \alpha_0 < 1$) : поток вещество между първата и втората клетки,
- α_1 ($0 < \alpha_1 < 1$) : поток вещество между втората и третата клетки,

- β_1 ($0 < \beta_1 < 1 - \alpha_1$): преференция за третата клетка,
- γ_1^* ($0 \leq \gamma_1^* < 1 - \alpha_1 - \beta_1$): изтичане от втората клетка,
- γ_2^* ($0 < \gamma_2^* \leq 1$): изтичане от третата клетка.



Фигура 13: $I(p_0)$ (плътна линия), $I(p_1)$ (пунктирана линия) и $I(p_2)$ (точкова пунктирана линия) като функция на β_1 когато всички останали параметри са фиксирани $\alpha_0 = 0.28$, $\alpha_1 = 0.04$, $\gamma_1^* = 0.04$, $\gamma_2^* = 0.13$.

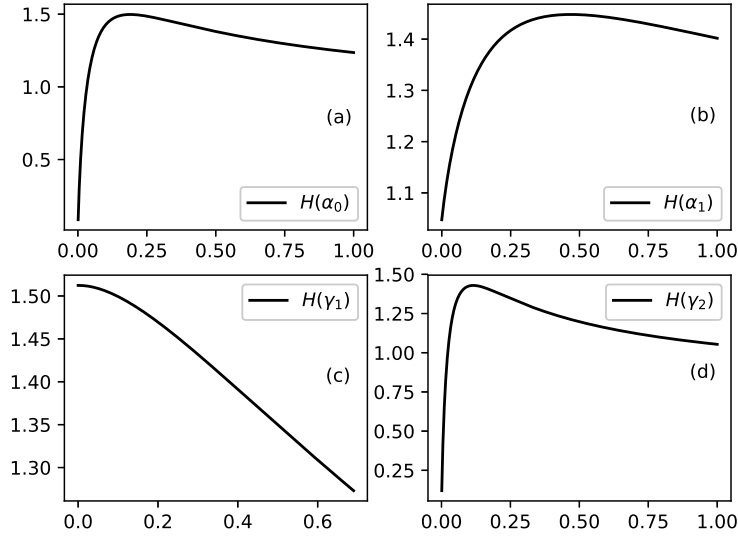
Информацията за елементарните събития, свързани със съответните клетки са

$$\begin{aligned}
 I(p_0) &= \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] \\
 I(p_1) &= \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] - \log \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right) \\
 (105) \quad I(p_2) &= \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] - \log \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right).
 \end{aligned}$$

Съответната информация на Шанън е

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right]} \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] + \\
 &\quad \frac{\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right]} \left\{ \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] - \right. \\
 &\quad \left. \log \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right) \right\} + \frac{\left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right)}{\left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right]} \left\{ \log \left[1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right. \right. \\
 (106) \quad &\quad \left. \left. \left(1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \right) \right] - \log \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{\gamma_2^*} \frac{\alpha_0}{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1^*} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

В този параграф са илюстрирани няколко зависимости на стойностите на величините $p_{0,1,2}$, $I(p_0, p_1, p_2)$ и H от параметрите, управляващи процеса α , β и γ . Тези зависимости добре



Фигура 14: Информация на Шанън като функция на избрани параметри при фиксирани други параметри. Фиг. (14a): $H(\alpha_0)$ при фиксирани параметри $\alpha_1 = 0.04$, $\beta_1 = 0.28$, $\gamma_1^* = 0.04$, $\gamma_2^* = 0.13$. Фиг. (14b): $H(\alpha_1)$ при фиксирани параметри $\alpha_0 = 0.4$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.3$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (14c): $H(\gamma_1^*)$ при фиксирани параметри $\alpha_0 = 0.4$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_2^* = 0.7$. Фиг. (14d): $H(\gamma_2)$ при фиксирани параметри $\alpha_0 = 0.2$, $\alpha_1 = 0.3$, $\beta_1 = 0.01$, $\gamma_1^* = 0.4$.

илюстрират една от най-интересните интерпретации на разглеждания модел - моделиране на мигрантски потоци. В този контекст Фиг. (10) изобразява влиянието на параметрите на модела върху разпределението на мигрантите в съответния канал. Особено интересен е случая на увеличаване на параметъра на изтичане γ_2^* , изобразен на Фиг. (10d). Увеличението на този параметър е еквивалентно на увеличаване на броя на мигрантите, които получават разрешение да останат в третата държава от разглеждания канал. Това може да доведе до относителен спад на мигрантите в тази страна за сметка на мигрантите в другите две страни на канала.

Фиг. (10c) показва, че увеличаването стойността на параметъра γ_1 (изтичане от втората държава) на изследвания канал променя относителното количество вещество в третата страна.

Ако мигрантите имат предпочитание към третата страна от канала, то количеството им тази страна нараства със нарастване на параметъра на преференция β_1 най-вече за сметка на количеството мигранти в предишната страна - Фиг. (11).

Промените в параметрите на модела влияят на информацията за свързани с потоци от мигранти събития (например информация за престъпни събития). С увеличаване на пропускливостта на границите между държавите (например с увеличаваща се стойност на параметър α_0) количеството информация, свързана с изследвания клас събития, се увеличава в първата страна на изследвания канал и намалява в следващите две страни - Фиг. (12a). Противоположен ефект, свързан с увеличаване на изтичането, е показан на Фиг. (12c).

Увеличаването на стойността на предпочитания параметър β_1 води до увеличаване на стойността на информацията, свързана с изучавания клас събития във втората страна на канала - Фиг. (13). Интересен е и факта, че ентропията на Шанън, свързана с изследвания клас събития, може да има максимуми за избрани стойности на параметрите на модела - Фиг. (14).

Основни приноси и резултати

Тук са изложени основните резултати от дисертацията и е посочена литературата, на основата на която е написана дисертацията.

Публикации и конференции

В тази глава е направен списък с публикациите, в които са изложени резултатите от дисертацията, както и конференции на които са докладвани.

Литература

В тази глава е събрана, цитираната в дисертацията литература.

III Основни приноси и резултати

1. Предложен е обобщен модел, описващ движението на веществото през клетките и рамената на канала, като се разглежда стационарният режим на движение на веществото. Важна негова характеристика е възможността при определени условия веществото да се концентрира в определени възли от мрежата. Математическият модел е основан на система обикновени диференциални уравнения.
2. На основата на модела за разпределение на веществото по клетките на канала, свързано с канал с едно рамо са получени множество разнообразни разпределения. Доколкото ни е известно, тези разпределения не са дискутирани досега от други автори:
 - (а) разпределението (11), свързано със стационарния поток на движение на вещество по канал, изграден от две безкрайни рамена;
 - (б) разпределенията (20) и (23), свързани със стационарния поток на движение на вещество по канал, изграден от две крайни рамена;
 - (в) разпределението (34), свързано със стационарния поток на движение на вещество по канал, изграден от три безкрайни рамена;
 - (г) разпределението (69), свързано със стационарния поток на движение на вещество по едно от рамената на канал, изграден от произволен брой безкрайни рамена;
 - (д) разпределенията (78) и (83) - (85), свързани със стационарния поток на движение на вещество по канал, изграден от произволен брой крайни рамена;
 - (е) разпределенията (94) и (97), свързани със стационарния поток на движение на вещество по канал, изграден от безкрайна редица от последователно свързани рамена;
3. Показано е, че част от тези разпределения са от класа на т.н. разпределения с „дълга“ опашка (long tail). Показано е също така, че някои от тях съдържат като частен случай множество други разпределения: равномерно, геометрично, степенно, както и някои известни разпределения като тези на Waring, Zipf, Yule-Simon и др.
4. Показано е, че разпределението на степените на върховете в модела на безмасштабните мрежи на Barabasi и Albert, както и някои негови обобщения, са частен случай на тези разпределения.

5. Получени са аналитични изрази на информацията за елементарните събития, свързани с разпределението на вещество по клетките на канал с произволен брой рамена. Получени са и изрази за ентропията на случайната величина (ентропия на Шанън), свързана със съответното вероятностно разпределение.
6. Чрез предложения подход би могло да се моделират голям клас от приложни задачи като например (i) логистичен канал, състоящ се от съоръжения за съхранение (складове), като всяко от тези съоръжения снабдява един град от мрежа от градове; (ii) съоръжение, осигуряващо придвижването на някаква субстанция (например вода) през клетките на сложна технологична система, като в този случай дъгите могат да се интерпретират като водопроводни тръби; (iii) моделиране на миграционни потоци, както и много други. В дисертацията е обсъдено възможното му приложение за моделиране на мигрантски потоци.

Общото между всички тези процеси е стремежът на пренасяното вещество да достигне максимално далечна точка по своя път. Ако за миграционните потоци и транспортните мрежи този стремеж е породен от желаната дестинация, то за случаите с водопреносната мрежа той може да се дължи на елементи, създаващи градиент на налягането или на естественото въздействие на гравитацията.

IV Публикации и конференции

Публикации

1. N. K. Vitanov and R. Borisov, "A model of a motion of substance in a channel of a network," *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 48, no. 3, pp. 74–84, 2018
2. N. K. Vitanov and R. Borisov, "Statistical characteristics of a flow of substance in a channel of network that contains three arms," in *Georgiev K., Todorov M., Georgiev I. (eds) Advanced Computing in Industrial Mathematics. BGSIAM 2017. Studies in Computational Intelligence*, pp. 421–432, Springer, 2019
3. R. Borisov and N. K. Vitanov, "Human migration: Model of a migration channel with a secondary and a tertiary arm," in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2075, p. 150001, AIP Publishing, 2019
4. R. Borisov, Z. I. Dimitrova, and N. K. Vitanov, "Statistical characteristics of stationary flow of substance in a network channel containing arbitrary number of arms," *Entropy*, vol. 22, no. 5, p. 553, 2020

Конференции

1. A model of a motion of substance in a channel of a network. 13th Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Sofia, Bulgaria, 6-9.09.2017
2. Statistical characteristics of a flow of substance in a network channel containing two arms. 12th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM, Sofia, Bulgaria, 20-22.12.2017.
3. Probability distributions connected to flow of substance in a channel of network. 14th Annual Meeting of the Bulgarian Section of SIAM, Sofia, Bulgaria, 17-19.12.2019.

Литература

- [1] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [2] S. H. Strogatz, “Exploring complex networks,” *nature*, vol. 410, no. 6825, p. 268, 2001.
- [3] P. Bork, L. J. Jensen, C. Von Mering, A. K. Ramani, I. Lee, and E. M. Marcotte, “Protein interaction networks from yeast to human,” *Current Opinion in Structural Biology*, vol. 14, no. 3, pp. 292–299, 2004.
- [4] H. Jeong, S. P. Mason, A.-L. Barabási, and Z. N. Oltvai, “Lethality and centrality in protein networks,” *Nature*, vol. 411, no. 6833, p. 41, 2001.
- [5] C. J. Stam, “Modern network science of neurological disorders,” *Nature Reviews Neuroscience*, vol. 15, no. 10, p. 683, 2014.
- [6] A.-L. Barabasi and Z. N. Oltvai, “Network biology: understanding the cell’s functional organization,” *Nature Reviews Genetics*, vol. 5, no. 2, p. 101, 2004.
- [7] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Epidemic spreading in scale-free networks,” *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 14, p. 3200, 2001.
- [8] J. Bollen, H. Mao, and X. Zeng, “Twitter mood predicts the stock market,” *Journal of Computational Science*, vol. 2, no. 1, pp. 1–8, 2011.
- [9] V. M. Eguiluz, D. R. Chialvo, G. A. Cecchi, M. Baliki, and A. V. Apkarian, “Scale-free brain functional networks,” *Physical Review Letters*, vol. 94, no. 1, p. 018102, 2005.
- [10] M. E. Newman, “The structure of scientific collaboration networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 98, no. 2, pp. 404–409, 2001.
- [11] R. Guimera, S. Mossa, A. Turtschi, and L. N. Amaral, “The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities’ global roles,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 102, no. 22, pp. 7794–7799, 2005.
- [12] A. E. Krause, K. A. Frank, D. M. Mason, R. E. Ulanowicz, and W. W. Taylor, “Compartments revealed in food-web structure,” *Nature*, vol. 426, no. 6964, p. 282, 2003.
- [13] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, *Evolution and structure of the Internet: A statistical physics approach*. Cambridge University Press, 2007.
- [14] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, “Topology, hierarchy, and correlations in internet graphs,” in *Complex Networks*, pp. 425–440, Springer, 2004.
- [15] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks,” *Nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.
- [16] R. De Castro and J. W. Grossman, “Famous trails to paul erdős,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 21, no. 3, pp. 51–53, 1999.
- [17] H. Ebel, L.-I. Mielsch, and S. Bornholdt, “Scale-free topology of e-mail networks,” *Physical Review E*, vol. 66, no. 3, p. 035103, 2002.

- [18] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai, and A.-L. Barabási, “The large-scale organization of metabolic networks,” *Nature*, vol. 407, no. 6804, p. 651, 2000.
- [19] J. Camacho, R. Guimerà, and L. A. N. Amaral, “Robust patterns in food web structure,” *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 22, p. 228102, 2002.
- [20] S. Milgram, “The small world problem,” *Psychology Today*, vol. 2, no. 1, pp. 60–67, 1967.
- [21] M. S. Granovetter, “The strength of weak ties,” in *Social networks*, pp. 347–367, Elsevier, 1977.
- [22] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [23] N. Bellomo, G. A. Marsan, and A. Tosin, *Complex systems and society: Modeling and simulation*. Springer, 2013.
- [24] L. Amaral and J. Ottino, “Augmenting the framework for the study of complex systems,” *The European Physical Journal B*, vol. 38, pp. 147–162, 2004.
- [25] N. K. Vitanov, Vitanov, and N. Vitanov, *Science Dynamics and Research Production*. Springer, Cham, 2016.
- [26] N. K. Vitanov, Z. I. Dimitrova, and M. Ausloos, “Verhulst–lotka–volterra (vlv) model of ideological struggle,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 389, no. 21, pp. 4970–4980, 2010.
- [27] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Physics Reports*, vol. 424, no. 4, pp. 175–308, 2006.
- [28] N. K. Vitanov, Z. I. Dimitrova, and K. N. Vitanov, “Traveling waves and statistical distributions connected to systems of interacting populations,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 66, no. 9, pp. 1666–1684, 2013.
- [29] N. K. Vitanov, M. Ausloos, and G. Rotundo, “Discrete model of ideological struggle accounting for migration,” *Advances in Complex Systems*, vol. 15, no. supp01, p. 1250049, 2012.
- [30] M. Newman, *Networks*. Oxford University Press, 2018.
- [31] A.-L. Barabási, *Network science*. Cambridge University Press, 2016.
- [32] S. N. Dorogovtsev, *Lectures on complex networks*, vol. 24. Oxford University Press, 2010.
- [33] R. Cohen and S. Havlin, *Complex networks: structure, robustness and function*. Cambridge University Press, 2010.
- [34] G. Caldarelli, *Scale-free networks: complex webs in nature and technology*. Oxford University Press, 2007.
- [35] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez, and A. Vespignani, “Dynamical and correlation properties of the internet,” *Physical Review Letters*, vol. 87, no. 25, p. 258701, 2001.
- [36] L. Ford and D. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1962.

- [37] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin, *Network flows: Theory, algorithms, and applications*.
- [38] W.-K. Chen, “Theory of nets: Flows in networks.,” 1989.
- [39] N. H. Gartner and G. Improta, “Urban traffic networks: Dynamic flow modeling and control,” *Transportation Analysis*, 1995.
- [40] L. Ambrosio, A. Bressan, D. Helbing, A. Klar, and E. Zuazua, *Modelling and Optimisation of Flows on Networks: Cetraro, Italy 2009, Editors: Benedetto Piccoli, Michel Rasche*, vol. 2062. Springer, 2012.
- [41] M. Rosvall, A. V. Esquivel, A. Lancichinetti, J. D. West, and R. Lambiotte, “Memory in network flows and its effects on spreading dynamics and community detection,” *Nature Communications*, vol. 5, p. 4630, 2014.
- [42] E. Bernard, L. Jacob, J. Mairal, and J.-P. Vert, “Efficient rna isoform identification and quantification from rna-seq data with network flows,” *Bioinformatics*, vol. 30, no. 17, pp. 2447–2455, 2014.
- [43] R. E. Gomory and T. C. Hu, “Multi-terminal network flows,” *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 9, no. 4, pp. 551–570, 1961.
- [44] D. Bertsimas and M. Sim, “Robust discrete optimization and network flows,” *Mathematical Programming*, vol. 98, no. 1-3, pp. 49–71, 2003.
- [45] J. E. Aronson, “A survey of dynamic network flows,” *Annals of Operations Research*, vol. 20, no. 1, pp. 1–66, 1989.
- [46] D. Helbing, L. Buzna, A. Johansson, and T. Werner, “Self-organized pedestrian crowd dynamics: Experiments, simulations, and design solutions,” *Transportation Science*, vol. 39, no. 1, pp. 1–24, 2005.
- [47] M. Skutella, “An introduction to network flows over time,” in *Research trends in combinatorial optimization*, pp. 451–482, Springer, 2009.
- [48] M. Treiber and A. Kesting, “Traffic flow dynamics,” *Traffic flow dynamics: Data, models and simulation*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.
- [49] A. V. Bozhenyuk, E. M. Gerasimenko, J. Kacprzyk, and I. N. Rozenberg, *Flows in networks under fuzzy conditions*. Springer, 2017.
- [50] N. K. Vitanov and K. N. Vitanov, “Box model of migration channels,” *Mathematical Social Sciences*, vol. 80, pp. 108–114, 2016.
- [51] N. K. Vitanov and R. Borisov, “Statistical characteristics of a flow of substance in a channel of network that contains three arms,” in *Georgiev K., Todorov M., Georgiev I. (eds) Advanced Computing in Industrial Mathematics. BGSIAM 2017. Studies in Computational Intelligence*, pp. 421–432, Springer, 2019.
- [52] N. K. Vitanov and K. N. Vitanov, “Discrete-time model for a motion of substance in a channel of a network with application to channels of human migration,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 509, pp. 635–650, 2018.

- [53] N. K. Vitanov and K. N. Vitanov, “On the motion of substance in a channel of a network and human migration,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 490, pp. 1277–1294, 2018.
- [54] N. K. Vitanov and R. Borisov, “A model of a motion of substance in a channel of a network,” *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, vol. 48, no. 3, pp. 74–84, 2018.
- [55] R. Borisov and N. K. Vitanov, “Human migration: Model of a migration channel with a secondary and a tertiary arm,” in *AIP Conference Proceedings*, vol. 2075, p. 150001, AIP Publishing, 2019.
- [56] N. K. Vitanov, K. N. Vitanov, and T. Ivanova, “Box model of migration in channels of migration networks,” in *Advanced Computing in Industrial Mathematics*, pp. 203–215, Springer, 2018.
- [57] V. P. Diodato and P. Gellatly, *Dictionary of bibliometrics*. Routledge, New York, 2013.
- [58] J. O. Irwin, “The generalized waring distribution applied to accident theory,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, pp. 205–225, 1968.
- [59] J. O. Irwin, “The place of mathematics in medical and biological statistics.,” *Journal of the Royal Statistical Society*, vol. 126, no. Pt. 1, pp. 1–41, 1963.
- [60] W.-C. Chen, “On the weak form of zipf’s law,” *Journal of Applied Probability*, vol. 17, no. 3, pp. 611–622, 1980.
- [61] H. A. Simon, “On a class of skew distribution functions,” *Biometrika*, vol. 42, no. 3/4, pp. 425–440, 1955.
- [62] M. Newman, *Networks: an introduction*. Oxford University Press, 2010.
- [63] P. L. Krapivsky, S. Redner, and F. Leyvraz, “Connectivity of growing random networks,” *Physical Review Letters*, vol. 85, no. 21, p. 4629, 2000.
- [64] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin, “Structure of growing networks with preferential linking,” *Physical review letters*, vol. 85, no. 21, p. 4633, 2000.
- [65] R. Borisov, Z. I. Dimitrova, and N. K. Vitanov, “Statistical characteristics of stationary flow of substance in a network channel containing arbitrary number of arms,” *Entropy*, vol. 22, no. 5, p. 553, 2020.