

ВИСША АТЕСТАЦИОННА КОМИСИЯ  
СПЕЦИАЛИЗИРАН НАУЧЕН СЪВЕТ  
ПО ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ  
ИНСТИТУТ ПО МЕХАНИКА

ст. н. с. II ст., д-р Станимир Димитров Илиев

**Статика и динамика при малки капилярни числа на  
течности, частично омокрящи твърдо тяло:  
вариационен подход**

АВТОРЕФЕРАТ

На дисертация за присъждане на научната степен  
ДОКТОР НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ НАУКИ

научна специалност

01.02.05 Механика на флуидите

Рецензенти:      проф., д.м.н. Запрян Запрянков  
                          проф., д.м.н. Красимир Данов  
                          ст.н.с., д.м.н. Николай Витанов

София, 2010 г.

Дисертационната работа съдържа 300 страници. Включва 103 фигури, 6 таблици, 306 уравнения. Библиографията обхваща 300 заглавия, от които 24 на кирилица и 276 на латиница. Основните резултати от дисертацията са публикувани в 27 научни публикации.

Дисертационната работа е обсъдена и насрочена за защита на разширено заседание на Лабораторията по Физикохимична Хидродинамика (ЛФХХ) на Института по Механика на БАН, проведено на 5.01.2010 г.

Дисертантът работи като ст. н. с. II ст. в ЛФХХ към Института по Механика на БАН, гр. София

Изследванията по дисертационния труд са извършени в Института по Механика на БАН.

Защитата на дисертационната работа ще се състои на ..... 2010г. от ..... часа в зала ..... на ..... на заседание на СНС по Приложна математика и механика на ВАК. Материалите по защитата са на разположение на интересуващите се в библиотеката на към Института по Механика на БАН, гр. София.

Номерата на фигурите и уравненията в автореферата съответстват на тези в дисертацията.

Автор: Станимир Димитров Илиев

Заглавие: Статика и динамика при малки капилярни числа на течности, частично омокрящи твърдо тяло: вариационен подход

Тираж 70 бр.

## Обща характеристика на дисертацията

Дисертацията се състои от 10 глави, които са обединени тематично в четири части. В автореферата уравненията и фигурите се цитират със същите имена, с които те се появяват в дисертацията. Публикациите по дисертацията са дадени в отделен списък и са номерирани като [Д1], [Д2], и т.н.

**Мотивировка на изследванията.** Дисертацията има теоретичен характер; посветена е на две основни взаимосвързани теми (а) статика и (б) динамика на течности, които имат трифазен контакт с флуид и с твърдо тяло.

Наличието на междуфазови граници е типично за задачите от хидродинамиката. Сред най-важните и сложни проблеми е моделирането и анализът на системи, в които взаимодействат флуидна и твърда фаза. Още по-сложен е случаят, когато в системата има контакт между такива междуфазови граници, формиращ област на взаимодействие на две флуидни фази с твърдо тяло. Освен появата на особености, свързани с трифазните взаимодействия, рязко се усилва и влиянието на локалната хетерогенност, грапавост, порестост на твърдата повърхност върху поведението на течността. Пред теоретичната хидродинамика стои задачата да моделира с методите на механиката на непрекъснатите среди разнообразните повърхностни и междуфазови взаимодействия, действащи на много малки мащаби (de Gennes, 1985; Adamson and Gast, 1997) в областта на трифазния контакт, да отчете особеностите на физическото състояние на повърхността. Трябва да се изразят характеристиките на поведението на течността в трифазната област чрез макроскопични, експериментално определяеми величини като скорост, ъгъл, вискозитет и др.

Проблемът има два взаимосвързани аспекта: статичен и динамичен. За статиката основен проблем е да се моделира задържането на трифазната контактна линия, като проявяващата се задържаща сила да се съгласува с експерименталните данни. За динамиката проблемът е по-комплексен. Използването на модела на Навие-Стокс с гранично условие за прилепване на течността към твърдото тяло не е достатъчно сполучливо за разглежданите трифазни задачи тъй като води до неинтегрируемо безкрайно напрежение на границата с твърдото тяло (Huh and Scriven, 1971).

Базирайки се на класическата хидродинамика и на капилярната теория, са предложени редица подходи и модели, описващи поведението на течността при наличие на трифазен контакт с твърдо тяло (виж обзорите на Dussan V., 1979; Davis, 1983; de Gennes, 1985; Blake 2006; Bonn *et al.*, 2009). Специфичните предположения за поведението на континуалната среда и включването на нови моделни параметри в тези модели доведоха до актуализацията на редица основни въпроси, свързани със спецификата на континуалното описание на непрекъснатите среди, които продължават да са предмет на дискусии. Сред тях са: до каква степен на намаляване на мащаба около контакта са валидни категориите и модела на хидродинамиката, каква е връзката между деформациите на средата и реалните молекулни движения, какви взаимодействия описва уравнението за равновесния контактен ъгъл на Юнг, за какъв тип твърди повърхности и за какво разстояние от тях то се отнася, как да се включат особеностите на микрорелефа на твърдата повърхност в характеристиките на взаимодействията между фазите, какви физични принципи да се използват за изменение на условието за прилепване и др.

Вариационният подход дава възможност от общи принципи да се разгледат състоянията на статика и на динамика на континуалната среда. Чрез тях се създава възможността да се опише движението на флуидната среда с налични условно неподвижни звена. Често преходите между части от повърхността са с рязко променящи се свойства, грапавостта също по същество означава отсъствие на гладкост на функцията, определяща формата на твърдата повърхност. В тези случаи виртуалната работа, свързана с виртуалните премествания на флуидните частици не е гладка функция, а по частите на повърхността, на които се губи гладкост на характеристиките, флуидът прилепва, движенията му също губят гладкост. Използването на най-общите постановки на вариационните принципи за флуидни системи дава възможност да бъдат описани и негладки характеристики на системата. Реализацията на тази програма е започната от Гибс (Gibbs, 1875-1878) при определянето на критериите за равновесие и устойчивост на хетерогенни системи с течно звено.

Целта на настоящата работа е да се продължи програмата на Гибс за моделиране и анализ на поведението на трифазната система: течност / флуид / твърдо тяло, в околността на контакт между тях. По конкретно, на моделирането

на няколко вече добре известни особености, като хистерезис на контактния ъгъл, наличие на съпротивление към преместване на видимата макроскопична контактна линия както при равновесие, така и при движение.

### **Цели и задачи на изследването**

Нашата *цел в Част I* на дисертацията е да се анализират особеностите в континуалното моделиране на хистерезиса на равновесния контактен ъгъл и да се получи и аргументира нова вариационна постановка на условията за равновесие, описващи хистерезиса. Трябва да бъдат решени следните по-важни задачи:

- Да се изведе вариационна формулировка на условието за равновесие на трифазната система: течност / флуид / твърдо тяло, отчитаща наличието на крайна сила, пречатстваща придвижването на контактната линия: вж. [Д4]-[Д7] и Глава 1 на дисертацията.
- Да се опише ефекта на хистерезис на контактния ъгъл чрез енергия, свързана с виртуално преместване на системата: вж. [Д5], [Д7] и Глава 1.
- Да се анализират следствията в поведението на трифазната система от наличието на нова енергия, свързана с преместванията на контактната линия и пропорционална на изменението на площта на контакт между течността и твърдото тяло: вж. [Д4]-[Д7] и Глава 2.
- Да се тества числено дали полученото условие за равновесие описва правилно особеностите на равновесие на капка върху хоризонтална и върху наклонена плоскост : вж. [Д5], [Д7] и Глава 2.

Описанието на съпротивлението към преместване на контактната линия чрез преодоляване на енергетична бариера, свързана с възможното нейно преместване актуализира въпроса как чрез нея да бъде включено задържащото действие на грапавостта и хетерогенността на твърдата повърхност. Актуално е да се анализират по-прецизно следствията върху равновесието на трифазната система, свързани с наличието на хетерогенност и грапавост.

Нашата *цел в Част II* на дисертацията е да се получат числено 3D решения за формите на равновесна капка в модела на капилярната теория върху хетерогенни и върху грапави подложки. Експерименталното определяне на физико-химичните параметри на омокрянето върху реални повърхности изисква прецизното

определяне на локалните контактни ъгли. Поради това, целта е да се разработи метод за определянето им чрез достъпни за експериментално наблюдение данни. Трябва да бъдат решени следните по-важни задачи:

- Да се изведат вариационните условия за равновесие при наличие на резки промени в повърхностното напрежение между флуидните фази и твърдото тяло, ситуация типична при твърда подложка, съставена от няколко материала : вж. [Д12], [Д13] и Глава 3.
- Да се получат числено множеството равновесни 3D форми на капка върху хетерогенна подложка при фиксиран обем на капката: вж. [Д3], [Д12] [Д13] и Глава 3.
- Да се изследва валидността на уравнението на Каси и на модифицираното уравнение на Каси, отчитащо наличието на линейно напрежение: вж. [Д13] и Глава 3.
- Да се изследва влиянието на флукуациите на повърхностното напрежение на подложката върху формата на равновесната контактна линия: вж. [Д10], [Д11] и Глава 4.
- Да се разработи числен алгоритъм за ефективно получаване на равновесните форми на капка върху грапава подложка: вж. [Д18] и Глава 4.
- Да се разработи и тества метод за определяне на локалния контактен ъгъл на равновесна капка: вж. [18] и Глава 5.

Адаптирането на хидродинамичните модели и на капилярната теория към особеностите на движението в околността на трифазен контакт показва наличието на характерни разстояния до твърдата повърхност, при по-малки от които, детайлното описание е затруднено и валидността на моделите е спорна. Актуално е да се съгласува хидродинамичният модел, включващ капилярните явления, с характеристиките на средата от непосредствената околност на контактната линия, в частност на енергетичните компоненти между двете области (de Gennes, 1985). Актуално е да се развива и тества подходът, базиращ се на връзката между движението на течността, отстояща на определено разстояние от реалния трифазен контакт и дисипацията на енергия от непосредствената околност на твърдата повърхност.

Нашата *цел в Част III* на дисертацията е чрез вариационния подход на

континуалната дисипативна механика да се изведат уравненията, описващи връзката между дисипацията на енергия от непосредствената околност на трифазния контакт и движението на визуалната контактна линия, както и да се анализират следствията, до които тези уравнения водят в поведението на системата. Трябва да бъдат решени следните по-важни задачи:

- Да се изведат от вариационен принцип уравненията, описващи квазистационарното движение на течност при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия: вж. [Д16] и Глава 6.
- Да се получат асимптотични решения за релаксацията на капка върху хоризонтална плоскост и за релаксацията на контактната линия на течност в контакт с вертикална пластина при отчитане на влиянието на различните канали на дисипация на енергия: вж. [Д14], [Д15], [Д17], [Д24], [Д26], [Д27] и Глава 7 на дисертацията.
- Да се анализират характеристиките на асимптотичните решения и да се сравнят с решенията от алтернативни подходи и с резултати от експериментални изследвания: вж. [Д14], [Д15], [Д17], [Д24], [Д26] и Глава 7 на дисертацията.
- Да се получат числено 3D решения за квазистационарното движение на течност и да се сравнят с експериментални изследвания: вж. [Д16], [Д19], [Д21], [Д22] и Глава 8 на дисертацията.
- Да се изведат вариационните уравнения, описващи преминаването на контактната линия през дефекти по твърдата повърхност, характеризиращи се с резки промени в повърхностното напрежение: вж. [Д8], [Д9], [Д25] и Глава 8 на дисертацията.
- Да се приложи моделът на дисипация на енергия при движение на контактната линия без предположението за квазистационарност на движението и да се отчете влиянието на инерцията: вж. [Д20], [Д23] и Глава 9 на дисертацията.

Сериозна тежест в съвременните изследвания, наред с теоретичните и асимптотични изследвания, пада върху численото изследване. Последното е особено актуално за проблемите, които се разглеждат в Глави I-III.

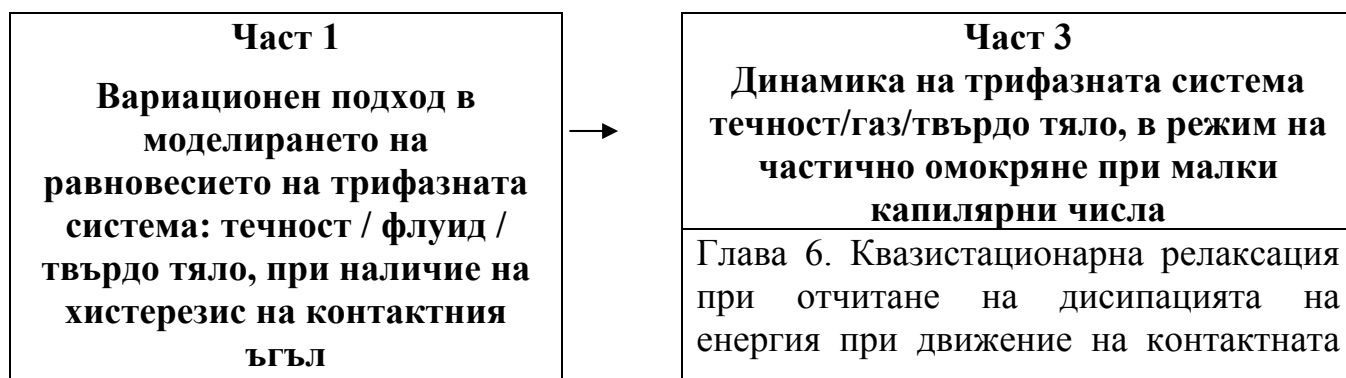
Нашата *цел в Част IV* на дисертацията е да се разработи ефективен числен алгоритъм, който позволява изследването на моделите и формулираните задачи от Части I-III. Трябва да бъде решена следната по-важна задача:

- Да се разработи числен алгоритъм, който е крайно-мерна апроксимация на принципа на виртуалната работа за класа задачи от Части I-III: вж. [Д1], [Д2] и Глава 10 на дисертацията.

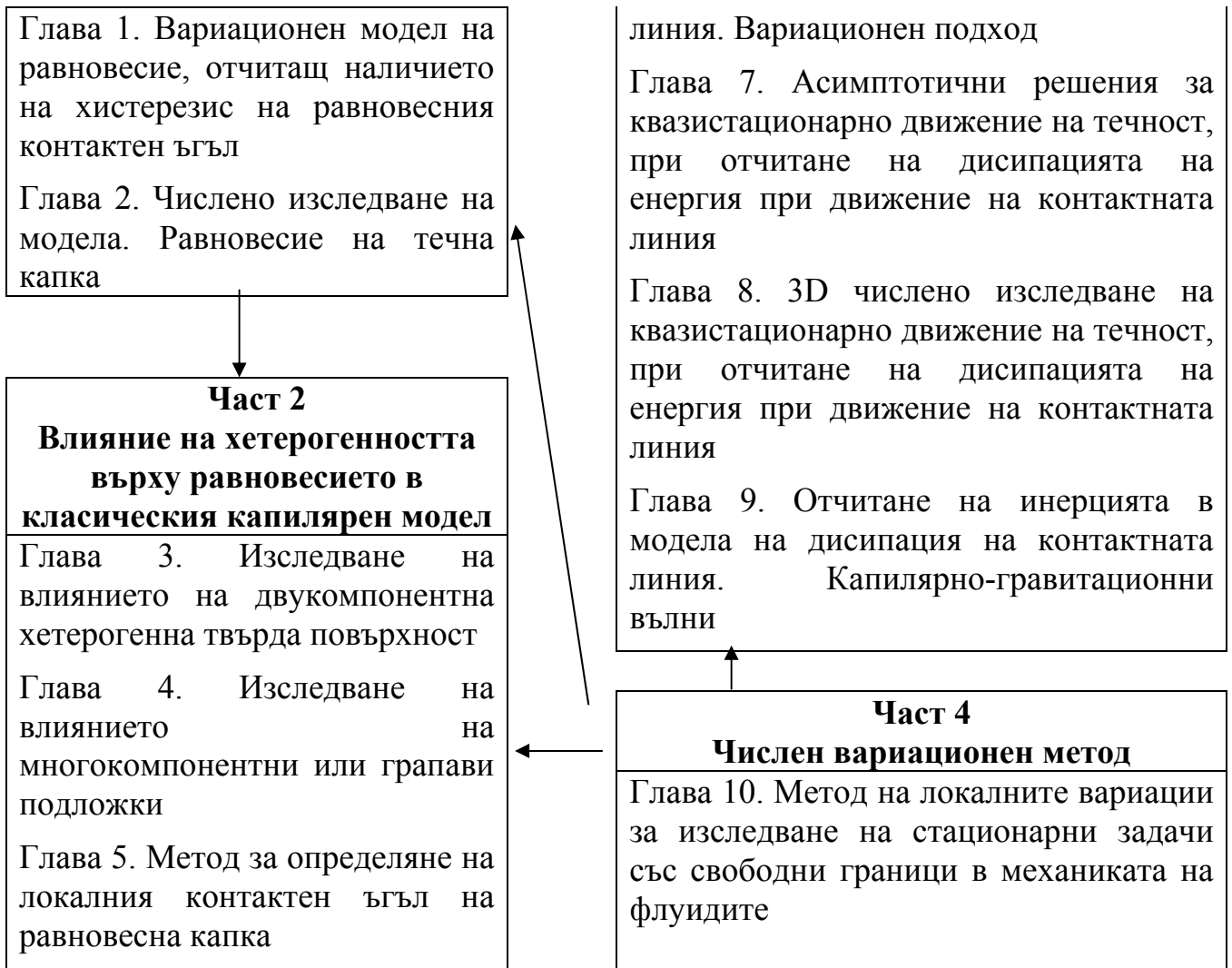
**Апробация на резултатите от дисертацията.** Резултатите от дисертацията са дискутирани на семинари, симпозиуми, конференции и конгреси в:  
Московския държавен университет (семинар на акад. РАН П.С.Краснощеков);  
Изчислителния център на РАН (семинар на акад. РАН Н.Н.Моисеев);  
Парижка Висша Школа по Физика и Индустриална Химия, лаборатория по физика и механика на хетерогенни среди (ESPCI-PMMH);  
Институт по механика, БАН : отчетни научни сесии;  
International Conference on Hydrodynamics of Technological Processes for Material Production, Sofia, 1991;  
Bulgarian-German-Norwegian Workshop Nonlinear problems of mathematical physics, Numerical simulations and visualization, Sofia, 2007;  
10 и 11 Национални конгреси по теоретична и приложна механика;  
36-38 Пролетни конференции на СМБ;  
European Coating Symposium 2007, Paris.

**Публикации.** Основните резултати на дисертацията са публикувани в 27 научни публикации. От тях 24 са рецензирани. Самостоятелните публикации са 11. Общо Импакт-фактор на публикациите е 23.9 (за 2007 г.). В списания с Импакт-фактор са 12 публикации, от които 6 са самостоятелни. Намерени се 40 цитирания на публикациите от дисертацията (от които 24 са на самостоятелните публикации), като сумарния импакт-фактор на цитиранията е 70.91 (за 2007 г.). Намерени са 6 цитирания в западни монографии.

**Структурата на дисертацията** е илюстрирана на следната схема







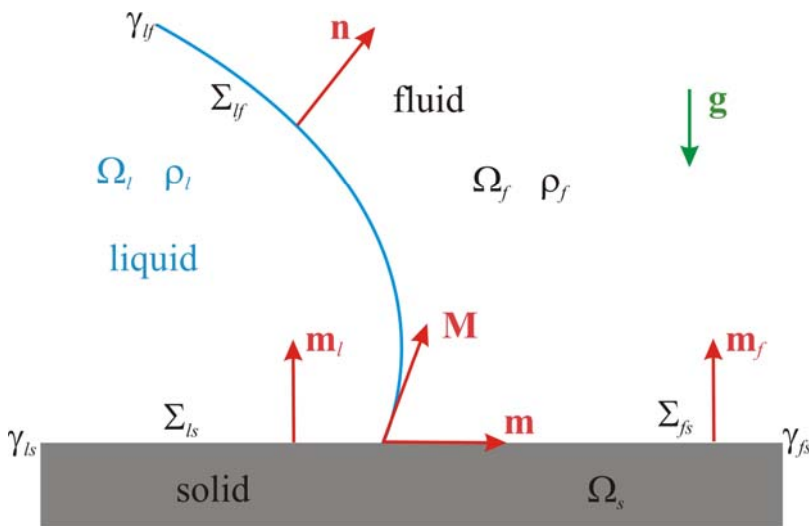
## Глава 1. Вариационен модел на равновесие, отчитащ наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл

Нека разгледаме трифазна система, която се състои от несвиваема течност, заемаща област  $\Omega_l$  във флуидна среда  $\Omega_f$ , която е в контакт с твърдо тяло (виж Фиг. 1.1.). На системата действат повърхностни сили  $\gamma_{lf}$ ,  $\gamma_{ls}$  и  $\gamma_{fs}$  и гравитационната сила  $\mathbf{g}$ . Косинусът на контактния ъгъл  $\theta$ , който течността сключва с твърдото тяло е  $\cos\theta = (\mathbf{M} \cdot -\mathbf{m})$ . Свободната енергия на системата, съгласно класическата капилярна теория е (Ландау и Лифшиц, 1986):

$$(1.1) \quad U = \int_{\Sigma_{lf}} \gamma_{lf} d\Sigma_{lf} + \int_{\Sigma_{ls}} \gamma_{ls} d\Sigma_{ls} + \int_{\Sigma_{fs}} \gamma_{fs} d\Sigma_{fs} + \int_{\Omega_l} \rho_l U_{gr} d\Omega_l + \int_{\Omega_f} \rho_f U_{gr} d\Omega_f$$

където  $\rho_l$  и  $\rho_f$  са плътностите на течността и флуида, а  $U_{gr}$  е потенциалната функция на гравитационното поле  $\mathbf{g}$  ( $\mathbf{g} = -gradU_{gr}$ ). Конвенционалното условие за равновесие е

$$(1.2) \quad \delta U = 0,$$



**Фиг. 1.1.** Схема на околността на трифазен контакт на разглежданата система.

като при вариациите следва да се отчита условието за запазване на обема на течността и граничните условия. От (1.2) се получават уравнението на Лаплас за точките от повърхността между течността и флуида и уравнението на Юнг за големината на статичния контактен ъгъл. Статичният ъгъл  $\theta_{eq}$  се изразява чрез повърхностните напрежения

$$(1.3) \quad \cos \theta_{eq} = (\gamma_{fs} - \gamma_{ls}) / \gamma_{lf}.$$

Условието (1.3) не отговаря на опита от практиката. Експериментите показват, че за различни геометрии на системата, съществува еднакъв интервал  $[\theta_r, \theta_a]$  от равновесни контактни ъгли. Два подхода на обосновка на тази закономерност са се оформили. Единият подход не променя уравнението на Юнг за равновесния контактен ъгъл, а причините на хистерезиса се определят чрез свойствата на реалната твърда повърхност (Johnson and Dettre, 1964): грапавост, химически примеси, нееднородност на структурата. Другият подход към обосновка на несъответствието на уравнението на Юнг с наличието на хистерезис на контактният ъгъл, обръща внимание на особеностите на околността на трифазен контакт в много близка дистанция около контакта.

От континуална гледна точка, включването на ефекта на хистерезис на контактният ъгъл в модела на равновесие на трифазната система може да се постигне директно чрез предположението, че трифазната контактна линия остава неподвижна, когато контактният ъгъл е в диапазона  $[\theta_r, \theta_a]$  в подхода, базиран на изменение на граничното условие в уравнението на Навие-Стокс, както и в подхода, свързващ движението на контактната линия с дисипативна сила (de Gennes, 1985). Чрез него косвено се отчита наличието на сила на съпротивление, но остава актуалността тя да бъде описана. През 30-те години на 20 век Ребиндер е

предложил модел на хистерезиса на равновесния контактен ъгъл чрез добавяне на сила  $\psi$  към баланса на силите, действащи на контактната линия. Тази сила се разглежда (виж обзора Сумм, 1999) като сходна със силата на статично триене. Този модел дава възможност да се опишат критичните големина на равновесния контактен ъгъл, но не става ясно как да бъде изведено условието за равновесни контактни ъгли от целия интервал. Нов подход към описанието на хистерезиса на контактния ъгъл е разработен от Френкел (1948). Според модела на Френкел, за да се реализира движение на капка надолу по наклонена плоскост, трябва да се преодолее силата на прилепване на задния ъ край (на най-високо намиращата се част от контакта ъ с твърдата повърхност), която е пропорционална на площта на откъсване и на  $\Delta\gamma = \gamma_{lf} + \gamma_{fs} - \gamma_{ls}$ . Моделът на Френкел успява за първи път да изрази големината на хистерезиса на равновесния контактен ъгъл чрез физико-химични параметри. По-късно Rouga and Fort получават подобно на полученото от Френкел уравнение за равновесието на двумерна течна капка, предполагайки, че ефекта на прилепване на отстъпващата част на капката е в резултат на образуването на течен филм. Недостатък на модела е, че определянето на условието за равновесие на базата само на едно виртуално преместване.

В Гл. 1 подходът на Френкел е развит като условията за равновесие са определени по отношение на класа от всички допустими вариации, а коефициента на пропорционалност не се свързва единствено с адхезията.

**Вариационен модел на равновесие.** Моделът на равновесие в класическата капилярна теория се базира на сравнение на енергията (1.1) на трифазната система между две близки нейни състояния. Игнорира се описанието на реалните движения на околността на трифазната контактна линия, свързани с прехода от едното състояние на системата в другото. За да се опише влиянието на тези движения в рамките на вариационния подход е удобно да разделим виртуалните премествания  $\delta \mathbf{R}, \mathbf{R} \in \Omega_l \cup \Omega_f$  условно на две части,  $\delta \mathbf{R} = \delta_1 \mathbf{R} + \delta_2 \mathbf{R}$ , така, че:

—  $\delta_1 \mathbf{R}$  да са свързани само с изменения на конфигурацията на системата. Този клас премествания се описва от класическата теория на капилярността. Виртуалната работа  $\delta_1 A$  на тези премествания е:

$$(1.18) \quad \delta_1 A = -\delta U$$

—  $\delta_2 \mathbf{R}$  са преместванията, не свързани с изменение на конфигурацията на

системата, но свързани с допълнителни движения, виртуалната работа на които е различна от нула. С тези премествания засега ще свържем единствено напускането на течността контактната с твърдото тяло област при оттичането на течността. Този вид на премествания не се описва от класа  $\delta_1 \mathbf{R}$ . При зададени  $\delta_2 \mathbf{R}$  тези движения не променят конфигурацията на системата. Ще опишем тези движения чрез класа на виртуални премествания  $\delta_2 \mathbf{R}$ . Нека означим с  $\delta^- |\Sigma_{ls}|$  площта по която течността  $\Omega_l$  се оттича от повърхността на твърдото тяло при промяна на конфигурацията на системата под действието на виртуални премествания  $\delta_2 \mathbf{R}$ . За виртуалните премествания на точките на течността от контактната повърхност с твърдото тяло имаме:

$$(1.19) \quad \delta_1 \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}_l(\mathbf{R}) = 0 \quad \text{за всички точки } \mathbf{R} \in \Sigma_{ls},$$

$$(1.20) \quad \delta_2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}_l(\mathbf{R}) > 0 \quad \text{за точките } \mathbf{R} \in \Sigma_{ls} \text{ по площ } \delta^- |\Sigma_{ls}|,$$

$$(1.21) \quad \delta_2 \mathbf{R} \cdot \mathbf{m}_l(\mathbf{R}) = 0 \quad \text{за останалите точки } \mathbf{R} \in \Sigma_{ls},$$

където с  $\mathbf{m}_l(\mathbf{R})$  е означен единичният нормален вектор в точката  $\mathbf{R} \in \Sigma_{ls}$ , в посока на вътрешността на течността (виж означенията на Фиг. 1.1). Ще предположим, че енергията  $\delta U_2$ , свързана с виртуалната работа  $\delta A_2$  в резултат на виртуалните премествания  $\delta_2 \mathbf{R}$ , е пропорционална на площта  $\delta^- |\Sigma_{ls}|$  на повърхността по която течността се е оттекла. Имаме:

$$(1.22) \quad \delta_2 A = -\chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}|$$

където с  $\chi_{ls}$  е означен коефициента на пропорционалност. В общия случай,  $\chi_{ls}$  може да е константа или функция (последната може да зависи от множество фактори, например, от разликата между текущия ъгъл от този, който се определя от уравнението на Юнг (1), от характеристиките на грапавостта на твърдата повърхност или на преодоляването на “дефектите” по нея и др.). Сумарната виртуална работа  $\delta A$  в резултат на виртуалните премествания  $\delta \mathbf{R} = \delta_1 \mathbf{R} + \delta_2 \mathbf{R}$  е:

$$(1.23) \quad \delta A = \delta_1 A + \delta_2 A = -\delta U - \chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}|,$$

Важен елемент в модела е факта, че съгласно (1.20) виртуалните премествания  $\delta_2 \mathbf{R}$  не са обратими. Това е свързано с приетото предположение, че течността, която е в контакт с твърдото тяло не може прониква в него. Друга интерпретация на необратимостта е приемането, че работата, свързана с откъсването на течността от твърдата повърхност е различна от работата за формирането на нова контактна

повърхност с твърдата фаза на течността, свързана с движението на течността в посока на новата контактна повърхност. Виртуалната работа (1.23) се описва чрез потенциална функция, която ще означим с  $U^*$ . Това дава възможност да се използва реализацията на принципа за виртуална работа (Lanczos, 1970) за необратими премествания. Равновесно състояние на изследваната тук система е това, за което

$$(1.25) \quad \delta A \leq 0, \quad (\delta A \equiv -\delta U^*), \quad \left( \delta U^* \equiv \delta U + \chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}| \right)$$

за всички виртуални премествания.

В предложения модел на равновесие (1.25), освен параметрите от класическата капилярна теория, има един нов параметър, коефициента  $\chi_{ls}$ . Този параметър може да се разглежда като характеристика на енергията (за единица площ), свързана с намаляването на контакта между течността и твърдото тяло. Би било логично, в модела да бъде добавен още един подобен параметър, но свързан с намаляването на площта на контакт между флуидната среда и твърдото тяло. Този параметър ще означим с  $\chi_{fs}$ . В този случай обобщаването на модела на равновесие (1.24) - (1.25) е очевидно. Виртуалната работа е:

$$(1.31) \quad \delta A = -\delta U - \chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}| - \chi_{fs} \delta^- |\Sigma_{fs}|$$

а условието за равновесие отново е (1.25) за всички виртуални премествания при  $\delta A$  определена от (1.31).

**Анализ на модела.** Ще групираме елементите от трифазната система на няколко части: 1. точки от контактната линия  $\mathbf{r}$  (означени чрез радиус векторите на тези точки); 2. точки от контактната повърхност между течността и флуида, но не принадлежащи на контактната линия  $\mathbf{R}$ ; 3. вътрешни точки  $\bar{\mathbf{R}}$  за обемните фази и точки от повърхността на твърдото тяло, не принадлежащи на трифазната контактна линия. Ще отчетем връзките:

$$(1.32) \quad \delta \int_{\Omega_l} d\Omega_l = -\delta \int_{\Omega_f} d\Omega_f$$

$$(1.33) \quad \delta \int_{\Sigma_l} d\Sigma_l = -\delta \int_{\Sigma_f} d\Sigma_f$$

$$(1.34) \quad \delta \int_{\Omega_l} d\Omega_l = \int_{\Sigma_{lf}} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{R}) d\Sigma_{lf} = 0$$

Виртуалната работа  $\delta A(\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}}, \delta \mathbf{R}, \delta \bar{\mathbf{R}})$  при отчитане на (1.34) чрез множител на

Лагранж -  $c$  се записва във вида

$$(1.39) \quad \delta A(\mathbf{R}, \bar{\mathbf{R}}, \delta \mathbf{R}, \delta \bar{\mathbf{R}}) = \int_{\Sigma_{lf}} \left[ \gamma_{lf} (k_1 + k_2) - (\rho_l - \rho_f) U_{gr} + c \right] (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{R}) d\Sigma_{lf},$$

където  $k_1, k_2$  са главните кривини на  $\Sigma_{lf}$ . Нека с  $\delta \mathbf{r}^+, l^+$ , и  $\delta \mathbf{r}^-, l^-$  означим виртуалните премествания  $\delta \mathbf{r}$  на точките  $\mathbf{r}$  и на частите от контактната линия, за които  $\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^+ > 0$  и  $\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^- < 0$  съответно (те увеличават и намаляват съответно площта на контакт между течността и твърдото тяло). За виртуалната работа  $-\chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}| - \chi_{fs} \delta^- |\Sigma_{fs}|$  имаме:

$$(1.43) \quad -\chi_{ls} \delta^- |\Sigma_{ls}| - \chi_{fs} \delta^- |\Sigma_{fs}| = \chi_{ls} \int_{l^-} [(\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^-)] dl_- - \chi_{fs} \int_{l^+} [(\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^+)] dl_+.$$

Отчитайки (1.39), (1.43) получаваме от (1.25) условието за равновесие във вида

$$(1.44) \quad \int_{\Sigma_{lf}} \left[ \gamma_{lf} (k_1 + k_2) - (\rho_l - \rho_f) U_{gr} + c \right] (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{R}) d\Sigma_{lf} + \int_l \left[ \gamma_{lf} (\mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{r}) + (\gamma_{fs} - \gamma_{ls}) (\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}) \right] dl + \chi_{ls} \int_{l^-} [(\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^-)] dl_- - \chi_{fs} \int_{l^+} [(\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^+)] dl_+ \leq 0$$

за всички възможни независими виртуални премествания.

Моделът на равновесие (1.44) при  $\chi_{ls} = \chi_{fs} = 0$  съвпада с модела от класическата теория на капилярността. Отчитайки, че  $\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^+ \geq 0$ ,  $\mathbf{m} \cdot \delta \mathbf{r}^- \leq 0$  от (1.44) получаваме условията за равновесие във всяка точка от контактната линия във вида:

$$(1.54) \quad (\gamma_{fs} - \gamma_{ls} - \chi_{fs}) / \gamma_{lf} \leq \cos \theta \leq (\gamma_{fs} - \gamma_{ls} + \chi_{ls} \chi_{fs}) / \gamma_{lf}.$$

Условието (1.54) се съгласува с моделите, които са предлагани по-рано. То, по същество, определя интервала на хистерезис на равновесния контактен ъгъл. Важното и новото в него е, че то показва какви сили и какви потенциални функции водят до наблюдавания експериментално хистерезис, който е характеристика на трифазната система. То показва защо всички контактни ъгли от интервала са равновесни. Заедно с това, то е получено чрез разглеждане на целия клас виртуални премествания на системата.

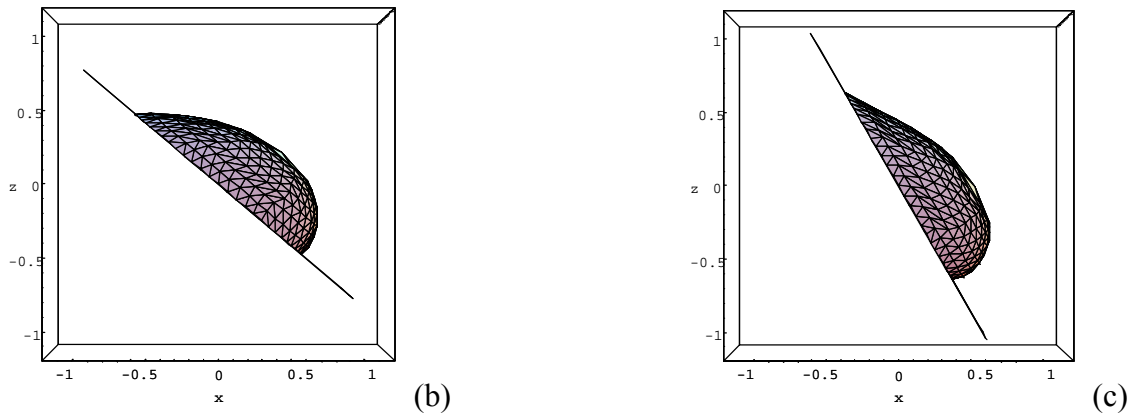
## Глава 2. Числено изследване на модела. Равновесие на течна капка

Полученото условие за равновесие (1.25) води пряко до наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл (1.54). Хистерезисът на равновесния

контактен ъгъл определя възможността за равновесие на течност на наклонена плоскост, на наличието на множество равновесни форми (и съответно на множество разнообразни контактни линии) на капка дори на хоризонтална плоскост. Актуален е въпросът за ефективното получаване и изследване на множеството от равновесни състояния, тяхната еволюция при изменение параметрите на системата (например обем на течността, наклон на подложката и др.). Глава 2 е посветена на изследването на множеството равновесни форми на капка на равновесна и на наклонена плоскост по отношение на модела, отчитащ наличието на съпротивление към преместване на контактната линия, развит в Гл. 1.

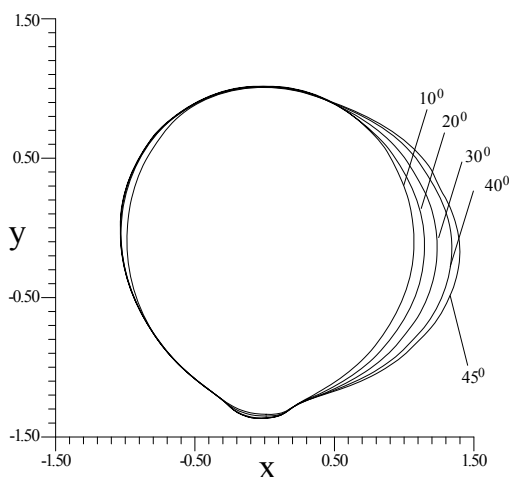
Една от базовите задачи, определила интереса към изследването на хистерезиса на равновесния контактен ъгъл е моделирането на равновесието на течна капка върху наклонена плоскост. В Гл. 2 са получени решения за равновесие на капка на наклонена плоскост. Първо е разгледан случаят, когато контактната линия на равновесното състояние е кръгла и неподвижна. Тази задача бе изследвана по-рано от Brown *et al.* (1980) и ние повторно получихме решения за този случай за използваните параметри с цел да се тества използвания от нас числен метод. Равновесните форми на течна капка са получени чрез метода на локалните вариации. Използва се моделът на равновесие във вариационна постановка (1.25), (1.31), описан в Гл. 10. Методът позволява включването на разнообразни връзки между вариациите на точките от трифазната система, използването на различни потенциални функции, отчитането на хетерогенност и грапавост на твърдата фаза при вариациите. Намирането на равновесно състояние спрямо модела на класическата теория на капилярността се реализира чрез намиране на минимум на функционала (1.1). В случая, когато в модела се отчитат и съпротивленията към преместване на контактната линия, базовата задача остава аналогична: намиране на минимум на функционал, но работата, свързана с вариацията на формата за този случай се описва от (1.31). На Фиг. 2.2. са показани проекциите на получените решения, чрез числения метод описан в Гл. 10., за формата на равновесната капка при ъгли на наклон на подложката (b)  $40^{\circ}$ , (c)  $60^{\circ}$  за същите параметри на задачата, за която Brown *et al.* (1980) са получили решения. Неподвижност на кръглата контактна линия е постигнато при  $\chi^a = \chi^r = 0.9$ . Формата на получените решения са визуално неразличими от представените на

Фиг. 5. от Brown *et al.* (1980) проекции на получените чрез FEM решения.



**Фиг. 2.2.** Форма на равновесни капки ( $V = 0.5$ ,  $b = 3.37$ ,  $\theta_Y = 70^\circ$ ,  $\chi^a = \chi^r = 0.9$ ) при ъгъл на наклон на твърдата подложка (b)  $40^\circ$ , (c)  $60^\circ$

За изследването на поведението на равновесна капка върху наклонена плоскост, интерес представлява получаването на изменението на формата на контактната линия при плавно изменение на ъгъла на наклон на твърдата подложка или на обема на капката. В Гл. 2. е изследвана еволюцията на равновесната форма и загубата на равновесие на цялата капка при плавно увеличение на наклона на подложката (при фиксиран обем на течността) и при плавно изменение на обема на капката (при фиксиран ъгъл на наклон на подложката), като първоначално подложката е хоризонтална. Разгледани са случаи, в които контактната линия на капката върху хоризонтална плоскост е кръг и когато спрямо кръглата форма е реализирана единична деформация.



**Фиг. 2.12.** Контактни линии на течните капки на наклонена плоскост. Движение по твърдата повърхност надолу се реализира в посока на увеличаване на стойностите на x-координатите на точките от контактната линия.

На Фиг. 2.12. са показани контактните линии на решенията, получени за формата на равновесна капка при постепенно увеличаване на ъгъла на наклон на подложката  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $40^\circ$  съответно. Числените експерименти показват, че критичен ъгъл на наклон на подложката за съществуването на равновесно решение



е  $42^{\circ}$ . На Фиг. 2.12 е показана контактната линия в момент от движението на цялата капка надолу по повърхността при ъгъл на наклон на подложката  $45^{\circ}$ .

Наличието на хистерезис на равновесния контактен ъгъл води и до качествено различни характеристики спрямо класическия капилярен модел на равновесните течни капки лежащи върху хоризонтална твърда подложка. В гл. 2 подробно е изследвано множеството от равновесни форми на капка както за случая на кръгла контактна линия, така и при деформирана контактна линия. Получено е множеството от ососиметрични равновесни капки при наличие на хистерезис. Получен е интервалът на свободна енергия на системата, за който капката е в равновесно състояние. Получени са разнообразни неососиметрични форми на равновесни капки на хоризонтална плоскост чрез числения 3D алгоритъм от Гл. 10.

### **Глава 3. Изследване на влиянието на двукомпонентна хетерогенна твърда повърхност**

Реалните физически повърхности не се хомогенни и гладки. В гл. 1. анализирахме как това рефлектира върху континуалното макроскопично описание на равновесието на течност при контакт с такава повърхност. Интерес представлява и прякото изследване на влиянието им върху равновесните състояния в рамките на класическия капилярен модел. Изследванията на конкретни реализации на хетерогенност и грапавост върху равновесните форми може да даде и връзка към по-прецизно континуално тяхно описание в макроскопични модели от типа, реализирани в Гл. 1. В Гл. 3 е изследван случая на макроскопичен характерен мащаб на хетерогенност на гладка плоскост. Предполага се, че поведението на трифазната контактна линия се описва от модела на класическата капилярна теория. Целта е да се получи числено решение на уравнението на Лаплас при зависещо от разположението на точките от контактната линия гранично условие - уравнението на Юнг. Големите кривини на контактната линия, които са характерни при наличието на хетерогенност и грапавост дават възможност да се изследва и влиянието на предложената от Гибс сила на линейно напрежение. Отчитането на линейно напрежение води до модификация на уравнението на Юнг (1.3) за равновесния контактен ъгъл. За локалния равновесен контактен ъгъл, който ще означим в този случай с  $\theta_{eq}^m$ , е изпълнено:

$$(3.1) \quad \cos \theta_{eq}^m = \cos \theta_{eq} - k\gamma_{fsl},$$

където  $\theta_{eq}$  удовлетворява (1.3),  $k$  е локалната кривина на контактната линия,  $\gamma_{fsl}$  е коефициент, определящ силата на линейното напрежение.

Цел е да се установи числено връзка между микроскопичното описание, характеристиките, свързани с хетерогенността и грапавостта и усреднените континуални характеристики. Подобни връзки са предложени за хетерогенна повърхност от Cassie (1948), за грапава - от Wenzel (1936). За хетерогенния случай, за повърхност, формирана от два вида материала (1) и (2), върху които контактната линия на течност формира равновесни ъгли съответно  $\theta_{eq}^{(1)}$  и  $\theta_{eq}^{(2)}$ , уравнението на Каси свързва усреднен равновесен контактен ъгъл  $\theta_{eq}^C$  (C -Cassie) с ъглите  $\theta_{eq}^{(1)}$ ,  $\theta_{eq}^{(2)}$  и с площите  $f_1, f_2$ , заемани от двата материала:

$$(3.2) \quad \cos \theta_{eq}^C = f_1 / (f_1 + f_2) \cos \theta_{eq}^{(1)} + f_2 / (f_1 + f_2) \cos \theta_{eq}^{(2)}.$$

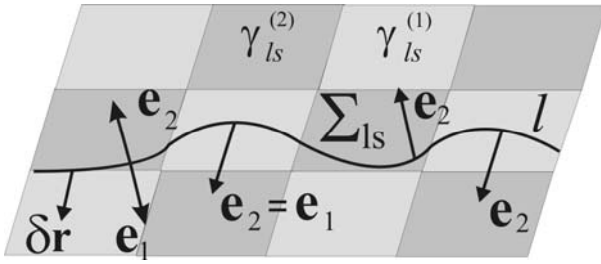
Отчитането на линейните напрежения в уравнението на Каси може да се реализира чрез заменяне в него на  $\theta_{eq}^{(1)}$  и  $\theta_{eq}^{(2)}$  с ъглите от (3.1).

Нека течност с обем  $V$  е в контакт с химически хетерогенна повърхност. Когато течността е капка, ще използваме означенията и предположенията за характеристиката на фазите, определени в Гл. 1. и представени схематично на Фиг. 1.1. Свободната енергия на системата има вида (1.1). Ще добавим и потенциалната енергия на линейното напрежение по трифазната контактна линия  $l$ , което за единица дължина е означено с  $\gamma_{fsl}$ . Така свободната енергия  $U$  има вида:

$$(3.3) \quad U = \int_{\Sigma_{lf}} \gamma_{lf} d\Sigma_{lf} + \int_{\Sigma_{ls}} \gamma_{ls} d\Sigma_{ls} + \int_{\Sigma_{fs}} \gamma_{fs} d\Sigma_{fs} + \int_{\Omega_l} \rho_l U_{gr} d\Omega_l + \int_{\Omega_f} \rho_f U_{gr} d\Omega_f + \int_l \gamma_{fsl} dl$$

Когато функциите на (3.3) не са гладки, използването на стандартното условие за равновесие (1.2) не е коректно. В гл. 3. е получено условието за равновесие, когато повърхностните напържения между флуидите и твърдото тяло не са гладки функции. Този случай е типичен, когато подложката е съставена от няколко хомогенни материала. Негладкостта на функциите изисква използването на по-общ вариационен подход, отчитащ наличието на необратими виртуални премествания. Изведено е аналитично от вариационен принцип, условието за равновесие на течност с трифазен контакт върху хетерогенна твърда повърхност, характеризираща се с резки промени на повърхностното напрежение. Предполага се, че течността е капка, но условията за равновесие са валидни за произволна трифазна система. Схематично част от контактната линия  $l$  на течната капка, която

тя формира върху твърда повърхност, съставена от два типа хомогенни парчета е показана на Фиг. 3.1.



**Фиг. 3.1.** Схематична картина на контактната линия  $l$  върху двукомпонентна хетерогенна повърхност.

Отчитайки параметрите на (3.3), ще използваме независимите променливи

$$(3.5) \quad \cos \theta_{eq}^{(1)} = (\gamma_{fs}^{(1)} - \gamma_{ls}^{(1)}) / \gamma_{lf}, \quad \cos \theta_{eq}^{(2)} = (\gamma_{fs}^{(2)} - \gamma_{ls}^{(2)}) / \gamma_{lf}, \quad \gamma^{(1)} = \gamma_{fsl}^{(1)} / \gamma_{lf}, \quad \gamma^{(2)} = \gamma_{fsl}^{(2)} / \gamma_{lf}$$

и обезразмеряване, използвайки капилярната дължина  $a = 1/\sqrt{b}$ . Изводът на условията за равновесие е подобен на реализирания в Гл. 1. На вътрешните точки от граничната повърхност между течността и флуидната среда в равновесие отново трябва да е изпълнено уравнението на Лаплас, а на точките от контактната линия, които не лежат на границата между дефектите - уравнението на Юнг. За точките от контактната линия  $\mathbf{r}$ , които са на границата между дефектите, виртуалната работа, свързана с преместването им  $\delta \mathbf{r}$  не е обратима функция; т.е.  $\delta A(\delta \mathbf{r}) \neq -\delta A(-\delta \mathbf{r})$ . Това е свързано с факта, че виртуалната работа зависи от повърхностните напрежения, а те са различни в двете противоположни посоки на преместване. Поради това стандартното условие за механично равновесие не може да се използва. Вместо него, отчитайки, че виртуалната работа може да се представи чрез потенциална функция, може да се използва, аналогично на използваното в Гл. 1, условие за равновесие (1.25). За равновесното състояние то изисква при всяко виртуално преместване, енергията на системата да не намалява.

Нека точката  $\mathbf{r}$  от контактната линия е разположена на границата между две хомогенни парчета от гладката твърда повърхност, които ще назовем тип (1) и (2), и които се характеризират с различни повърхностни и линейни напрежения  $\gamma_{ls}^{(1)}, \gamma_{fs}^{(1)}, \gamma_{fsl}^{(1)}$  и  $\gamma_{ls}^{(2)}, \gamma_{fs}^{(2)}, \gamma_{fsl}^{(2)}$  съответно. Виртуалната работа при преместване  $\delta \mathbf{r}$  такава, че точката  $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$  е върху материала тип (1) е:

$$(3.6) \quad \gamma_{lf} \left[ \cos \theta - \cos \theta_{eq}^{(1)} - k_1 \gamma^{(1)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \right] \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r},$$

където  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  са единични нормални към контактната линия  $l$  вектори и тангенциални към повърхността между течността и твърдото тяло. Векторът  $\mathbf{e}_1$  е в

посока извън контактната повърхност течност/твърдо тяло  $\Sigma_{ls}$ , а  $\mathbf{e}_2$  е проекция на главната нормала на контактната линия  $l$ , като в общия случай имаме  $\mathbf{e}_2 = \pm \mathbf{e}_1$ ; виж Фиг. 3.1. Когато точката  $\mathbf{r} - \delta \mathbf{r}$  се намира върху материала тип (2), виртуалната работа при преместване  $-\delta \mathbf{r}$  е:

$$(3.7) \quad -\gamma_{lf} \left[ \cos \theta - \cos \theta_{eq}^{(2)} - k\gamma^{(2)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \right] \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r}.$$

Така условията за равновесие водят до изискването да са изпълнени едновременно двете условия:

$$(3.8) \quad [\cos \theta - \cos \theta_{eq}^{(1)} - k\gamma^{(1)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)] (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \leq 0$$

$$(3.9) \quad -[\cos \theta - \cos \theta_{eq}^{(2)} - k\gamma^{(2)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)] (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_1) \leq 0$$

Отчитайки тези условия и вземайки предвид посоката на главната нормала на контактната линия, следното комбинирано условие за равновесния контактен ъгъл  $\theta_{eq}$  се получава:

$$(3.10) \quad \cos \theta_{eq}^{(2)} + k\gamma^{(2)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \leq \cos \theta_{eq} \leq \cos \theta_{eq}^{(1)} + k\gamma^{(1)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2),$$

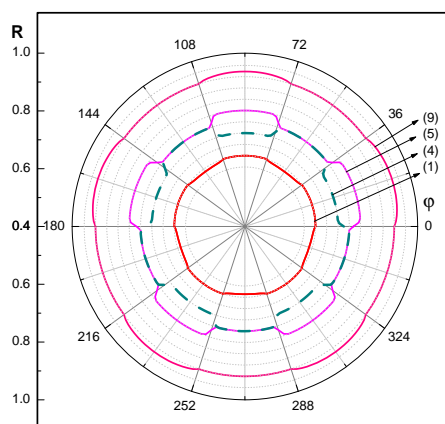
когато  $\mathbf{e}_1$  е в посока на материала от тип (1) от подложката и

$$(3.11) \quad \cos \theta_{eq}^{(1)} + k\gamma^{(1)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) \leq \cos \theta_{eq} \leq \cos \theta_{eq}^{(2)} + k\gamma^{(2)} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2),$$

когато  $\mathbf{e}_1$  е в посока на материала от тип (2) от подложката. При  $\theta_{eq}^{(1)} \neq \theta_{eq}^{(2)}$  само едно от условията (3.10) и (3.11) е изпълнено. Когато линейното напрежение се пренебрегва, равновесния контактен ъгъл е в интервала  $[\theta_{eq}^{(1)}, \theta_{eq}^{(2)}]$ . Контактната линия, която е на контакта между материалите и сключва контактен ъгъл в интервала  $[\theta_{eq}^{(1)}, \theta_{eq}^{(2)}]$  може и да бъде и да не бъде в равновесие. Конкретната реализация зависи от това дали материал (1) или (2) е разположен в посока на контактната повърхност между капката и повърхността  $\Sigma_{ls}$ .

Използвайки така полученото условие за равновесие, в Гл. 3, чрез модификация на разработения числен алгоритъм в Гл. 10., са получени равновесни форми на капка върху два типа хоризонтални подложки, съставени от два материала: радиално разположени парчета от редуващи се два типа материали, характеризиращи се с различни повърхностни и линейни напрежения, и радиални парчета, всяко едно от което е съставено от редуващи се сектори от двата типа материали (тип дартс). Разгледан е случаят, когато центърът на тежестта на равновесната капка е на вертикалната ос, минаваща през центъра на симетрия на подложката. За получените решения са изследвани валидността на уравнението на

Каси и на модифицираното уравнение на Каси. Анализирани са особеностите за двата типа подложки. При използваните параметри на системата, са получени 9 различни равновесни решения когато капката е върху подложка тип дартс (за случая, когато линейни напрежения не се отчитат и за случая, когато  $\gamma^{(1)} = \gamma^{(2)} = 0.05$ ). На Фиг. 3.7(a) са показани няколко от контактните линии на така получените девет равновесни форми в полярна координатна система. Контактните линии на решението, което е с най-близката до центъра на координатната система контактна линия и на решението, което е с най-отдалечена от центъра контактна линия се състоят от два типа части: от сегменти разположени на граничните линии между дефектите и от части, които са вътрешни за хомогенните парчета от които е съставена подложката. Останалите равновесни контактни линии се състоят само от части, които са гранични за парчетата от подложката. Усреднения контактен ъгъл монотонно намалява от решението с индекс (1) до решението с индекс (9). Изследванията показват, че равновесното състояние (4) е състояние с глобален минимум на свободната енергия. Именно усредненият контактен ъгъл на това състояние е много близък до ъгъла, определен от уравнението на Каси.



**Фиг. 3.7(a).** Контактните линии на няколко от получените равновесни форми (без отчитане на линейно напрежение). Тънките пунктирани линии са концентричните кръгови сегменти които са граници между двата материала от подложката.

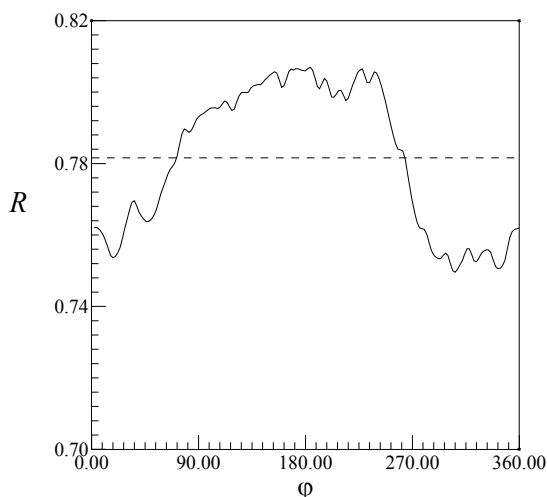
## Глава 4. Изследване на влиянието на многокомпонентни или грапави подложки

В Гл. 4 са продължени изследванията от Гл. 3 като е разгледан случай, в който хетерогенната подложка е съставена от повече материала. Вида на подложката не се променя – тя е отново тип радиални парчета и тип дартс, но величината на равновесния контактен ъгъл върху всяко едно от петната е случайна величина с равномерно разпределение. Числените изследвания показват, като следствие на нелинейните свойства на системата, че негладки изменения на

величината на локалния контактен ъгъл, предизвикват нелокални изменения на контактната линия.

На фиг. 4.1(b) е показан резултат за подложка от 30 еднакви радиални сектора. Контактният ъгъл е случайна величина с равномерно разпределение в интервала  $55^{\circ}$ - $65^{\circ}$ . Полученото решение за формата на равновесната капка е единствено. То е получено стартирайки минимизационния процес от различни начални форми. На Фиг. 4.1(b) с непрекъсната линия е показана контактната линия  $l = (\varphi, R(\varphi))$  на полученото решение като функция на полярния ъгъл, а с пунктирна линия - радиуса на ососиметричната равновесна контактна линия на капка върху хомогенна плоскост със същия обем и контактен ъгъл  $60^{\circ}$  - средният ъгъл който се формира на подложката. Между  $R(\varphi)$  и функцията  $\theta(\varphi)$  няма линейна връзка. В случая, размера на нелинейната флуктуация обхваща почти половината от дължината на контактната линия, като се вижда пряка нейна релация с локалните микро-флуктуации на контактния ъгъл на полученото решение. Подобно поведение е типично за равновесната контактна линия при случайно разпределение на контактния ъгъл.

В гл. 4. са получени и равновесни форми на капка върху хетерогенна подложка от успоредни ивици и върху хомогенна грапава повърхност.



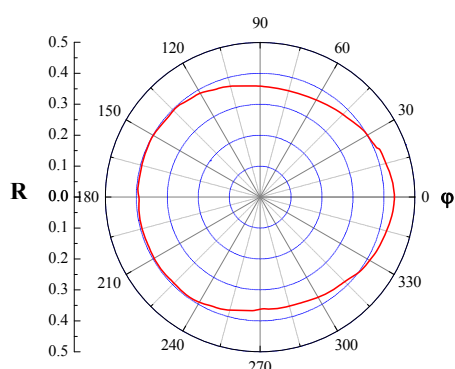
**Фиг. 4.1(b).** С непрекъсната линия - контактната линия на полученото решение като функция на полярния ъгъл; с пунктирна линия - радиуса на ососиметрична равновесна форма на капка върху хомогенна плоскост със същия обем и контактен ъгъл  $60^{\circ}$  - средният ъгъл който се формира на подложката.

## Глава 5. Метод за определяне на локалния контактен ъгъл на равновесна капка

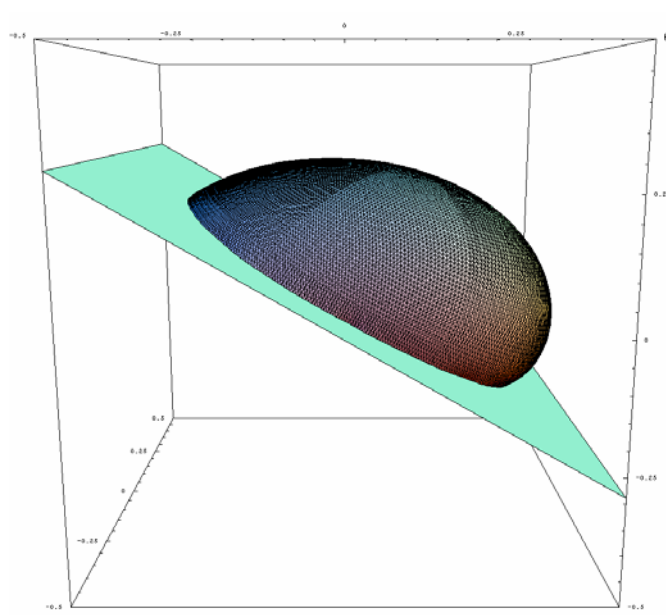
Един от базовите методи за определяне на статичния контактен ъгъл е проекционния метод на единичната седяща капка. По-добра точност на определянето на големината на контактния ъгъл на ососиметрична равновесна

капка се получава чрез определяне на големината на радиуса на капката или още по-добре - чрез проекция на профила на свободната ѝ повърхност. Получени експериментално, тези резултати се апроксимират с решение на уравнението на Лаплас, което за ососиметрична капка е обикновено диференциално уравнение. На така полученото решение се определя ъгъла му на контакт с хоризонталната подложка. Този ъгъл се взема за апроксимация на реалния контактен ъгъл. Чрез този метод се достига по-голяма точност на измерването на контактния ъгъл от колкото чрез директното му определяне чрез допирателната права към експериментално получената проекция на капката (Li and Neumann, 1990). В Гл. 5 реализирано обобщение на този метод за случая, когато няма осева симетрия на формата на капката. По същество, реализацията на метода представлява решаване на обратната задача на решаваната в Гл. 4. Ако в Гл. 4. при зададен обем и физико-химични характеристики, определяхме формата на капката и контактната ѝ линия, то настоящата глава по зададен обем, контактна линия, и физикохимични характеристики (повърхностно напрежение на свободната повърхност и плътност) се получава формата, която при зададената контактна линия има минимална енергия, т.е. равновесната ѝ форма. Физико-химичните характеристики на течността обикновено са известни от други експерименти, обемът на капката може да се определи с голяма точност чрез уредите с които се формира течната капка. Контактната линия на капката (поне за контактни ъгли до  $90^0$ ) може да бъде получена лесно с голяма точност чрез фотография на капката. В Гл. 5 е решена следната задача: По зададена контактна линия на равновесна капка и обем на течността да се определи формата на равновесната свободна повърхност на капката. Капката може да бъде и на наклонена и/или грапава повърхност. В случаите, когато обемът на течната капка не е определен от експеримента, за получаване на формата ѝ, вместо обема може да се използва и друга информация за нея. Методът използва стандартните числени програми от пакета, описан подробно в Гл. 10. След определяне на формата на свободната повърхност, контактният ъгъл във всяка една точка от контактната линия се определя чрез единичните нормали към получената свободна повърхност и повърхността на подложката. Предложеният метод е илюстриран за няколко примера: за равновесна капка на хоризонтална плоскост, за капка на гладка наклонена плоскост, и за

хомогенна грапава повърхност. На Фиг. 5.9. е показано полученото числено решение за формата на равновесна течна капка по публикувани в Rotenberg *et al.* (1984) експериментални данни за контактната ѝ линия, наклон на плоскостта -  $\alpha = 30^0$  и обем на капката  $V=0.0093 \text{ cm}^3$ . На Фиг. 5.8. е показана контактната линия от Фиг. 4(a) от Rotenberg *et al.* (1984) в полярна координатна система  $(\varphi, R)$ . Полученото с числения алгоритъм решение за равновесната форма на капката е показано на Фиг. 5.9. На така получената форма са получени локалните големини на контактния ъгъл. Тези резултати са много близки до представените от Rotenberg *et al.* (1984) резултати от пряко измерване на контактния ъгъл.



**Фиг. 5.8.** Експериментално получена контактна линия на равновесна капка, показана на Фиг. 4(a) в Rotenberg *et al.* (1984).



**Фиг. 5.9.** Получената чрез числения алгоритъм форма на водна капка (в см) на наклонена плоскост с ъгъл на наклон  $30^0$ .

## Глава 6. Квазистационарна релаксация при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия.

### Вариационен подход

Хидродинамичното моделиране на движението на трифазната система: течност / флуид / твърдо тяло, изисква да е определено граничното условие на трифазната граница. За гранично условие на контактната повърхност на течността с твърдото тяло, и следователно на границата ѝ, явяваща се трифазната линия, в уравнението на Навие-Стокс се е наложило условието за прилепване. Публикацията на Huh and Scriven (1971), в която е показано, че условието за



прилепване води до разходимост на загубата на енергия в точките от контактната трифазна линия, актуализира дискусиата за граничните условия в уравнението на Навие-Стокс, за възможното движение на контактната линия, за ограниченията и възможностите на описанието на поведението на трифазната граница чрез техниката на механиката на непрекъснатите среди. За да съответства на визуалното движение на трифазната контактна линия, в модела на Навие-Стокс са предложени няколко нови гранични условия, допускащи приплъзване на течността по контакта с твърда повърхност поне в околност на контактната линия (Dussan V., 1979). Промените в граничното условие не определят изцяло необходимите гранични условия. Необходимо да бъде зададено като гранично условие големината на контактния ъгъл. Експерименталните изследвания при много малки капиллярни числа показват наличието на релация между скоростта на относително движение между течността и твърдата повърхност и големината на динамичния контактен ъгъл.

В Гл. 6 - 9 от дисертацията е изследван случая при който капилярните числа са много малки, влиянието на капилярността е осезаемо и се проявява релация между скорост и динамичен ъгъл. Няколко теоретични модела привеждат аргументи за връзка между големината на динамичния контактен ъгъл и скоростта на относително движение между течността и твърдото тяло. Войнов (1976) е указал на възможността се определи връзка между ъгъл  $\theta$  и скорост  $U$  чрез използване на хидродинамични съображения за движението на течността в клина, който се формира в околност на контактната линия. Движението на течността формира нормална към свободната повърхност компонента на налягането  $p_n$ :

$$(6.1) \quad p_n = 2\eta U h^{-1} (\theta - \sin \theta \cos \theta)^{-1} \sin^2 \theta$$

където  $h$  е разстоянието до твърдата повърхност,  $\eta$  - динамичния вискозитет. Отчитането на това налягане в уравнението на Лаплас дава връзка между скоростта и динамичния ъгъл. Алтернативен подход отчита, че на разстояние  $h_y$  от твърдата повърхност на повърхността между течността и флуидната среда е валиден капилярния модел, там действат не само повърхностните сили между течността и флуида, но и повърхностните сили между флуидните среди и твърдата повърхност. Движение на течността със скорост  $U$  на разстояние  $h_y$  от твърдата повърхност е свързано с движение в областта между твърдото тяло и разстоянието  $h_y$

вследствие на което в тази област има дисипация на енергия. Чрез връзката между движението и дисипацията на енергия може да се определи големината на динамичния контактен ъгъл (de Gennes, 1985). В този подход могат да се разглеждат едновременно различни канали на дисипация на енергия от околността на трифазния контакт. Този подход е предмет на изследване в дисертацията. De Gennes разглежда вискозната дисипация единствено за случая на много малък контактен ъгъл  $\theta \ll 1$  и в приближение за плоско паралелно на твърдата повърхност течение за дисипацията на енергия  $T \Sigma_w^0$  получава (de Gennes, 1985):

$$(6.5) \quad T \Sigma_w^0 = 3 \frac{\eta}{\theta} U^2 \ln(h/h_m)$$

и като следствие получава уравнението за динамичния контактен ъгъл

$$(6.6) \quad \gamma_{lf} (\cos \theta_{eq} - \cos \theta) = 6 \frac{\eta}{\theta} \ln(h/h_m) U.$$

Връзка между движението на точката, отстояща на разстояние  $h_Y$  от твърдата повърхност под действие на некомпенсираните капилярни сили и дисипацията на енергия от околност на реалната контактна линия от мащаб по-малък от  $h_Y$  е получена и от молекулно-кинетични съображения от Blake and Haynes (1969). Крайната формула е:

$$(6.9) \quad \gamma_{lf} (\cos \theta_{eq} - \cos \theta) = \xi U,$$

където е положено

$$(6.10) \quad \xi = k_B T / k^0 \lambda^3,$$

$k_B$  е константата на Болцман,  $T$  е абсолютната температура,  $k^0$  - честотата на случайните равновесни молекулни премествания на молекулите от преходната трифазна зона,  $\lambda$  средното разстояние на преместване. Уравнението (6.9) като структура е близко до модела (6.6). Дисипацията  $T \Sigma_l^0$  в този модел за единица време и единица дължина на контактната линия е:

$$(6.11) \quad T \Sigma_l^0 = \frac{\xi}{2} U^2,$$

а  $\xi$  може да се разглежда като дисипативен коефициент.

В Гл. 6 от дисертацията е изведен чрез подхода на дисипативната механика аналог на (6.6) и (6.9) за нестационарно движение на визуалната контактна линия. В моделите (6.5), (6.11) дисипацията на енергия за единица време, свързана с движението на контактната линия  $l$  може да се запише във вида:

$$(6.14) \quad T = \int_l \psi \frac{v_n^2}{2} dl$$

където  $v_n$  е компонентата на скоростта по нормалата към контактната линия,  $\psi$  е коефициент, различен за различните модели. В дисертацията се изследват няколко различни коефициента

$$(6.15) \quad \psi = \xi = k_B T / k^0 \lambda^3$$

$$(6.16) \quad \psi = 3 \frac{\eta}{\theta} \ln(h_Y / h_m);$$

$$(6.17) \quad \psi = 3 \frac{\eta}{\operatorname{tg} \theta} \ln(h_Y / h_m)$$

$$(6.18) \quad \psi = 2\eta \ln(h_Y / h_m) \sin^2 \theta / (\theta - \sin \theta \cos \theta),$$

като (6.15) – (6.18) се получават от хидродинамични съображения.

Ще разгледаме конкретна система - малка течна капка върху хоризонтална хомогенна повърхност с обем  $V$ . Ще използваме означенията за тази система, използвани в Гл. 1 (виж също Фиг. 1.1). Ще предпологаме, че течността е несвиваема и влиянието на гравитацията е пренебрежимо малко (отчитането на влиянието на гравитацията е тривиално). Потенциалната енергия  $U$  (1.1) на системата в този случай е сума от повърхностните капилярни енергии. Съгласно принципа на Хамилтон (Моисеев и Румянцев, 1965) имаме:

$$(6.20) \quad \int_{t_0}^{t_1} (\delta K + \delta W) dt = 0,$$

където  $\delta W$  е виртуалната работа на активните сили,  $\delta K$  е вариация на кинетичната енергия на системата,  $t_0$  и  $t_1$  са моменти от време. Виртуалната работа  $\delta W$  е

$$(6.21) \quad \delta W = -\delta U + \delta W_1,$$

където  $\delta W_1$  е виртуалната работа на дисипативната сила (6.14). Класа на виртуални премествания в (6.20) удовлетворява условието за несмесване на фазите и условието за запазване на обема на течната капка. Тъй като движението се предполага квазистационарно, влиянието на кинетичната енергия може да се пренебрегне. Виртуалните премествания в (6.20) не са независими, тъй като те трябва да удовлетворяват условието за запазване на обема на течността при преместванията. Въвеждайки множител на Лагранж  $\lambda$  и добавяйки  $\lambda V$  в (6.20)

получаваме условието:

$$(6.24) \quad -\delta U + \delta W_1 + \lambda \delta V = 0,$$

където  $\delta W_1$  е:

$$(6.25) \quad \delta W_1 = -\int_l \psi v_n \delta R_n dl,$$

а  $\delta R_n$  са виртуалните премествания на точките от контактна линия в посока на нормалата към линията. Вариацията на потенциалната енергия при условието за запазване на обема е:

$$(6.26) \quad \delta(-U + \lambda V) = \int_{\Sigma_{lf}} (2\gamma_{lf}k - \lambda) \delta R_n d\Sigma_{lf} + \gamma_{lf} \int_l (\cos \theta_{eq} - \cos \theta) \delta R_n dl$$

където  $\delta R_n$  са виртуалните премествания на точките от свободната повърхност  $\Sigma_{lf}$  и контактна линия съответно, в посока на нормалата към повърхността и линията  $l$ ,  $k$  е средната кривина на свободната повърхност на капката. Замествайки (6.26) и (6.25) в (6.24) и отчитайки че виртуалните премествания са независими, на свободната повърхност получаваме уравнението на Лаплас, което трябва да е изпълнено във всеки момент от време и уравнението

$$(6.28) \quad \cos \theta_{eq} - \cos \theta(\mathbf{R}) = \frac{\psi}{\gamma_{lf}} v_n(\mathbf{R}), \mathbf{R} \in l$$

за точките  $\mathbf{R}$  от контактната линия.

## **Глава 7. Асимптотични решения за квазистационарно движение на течност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия**

В Гл. 7. са получени асимптотични решения, описващи квазистатичната релаксацията на контактната линия и на динамичния контактен ъгъл за два типа геометрии на трифазната система: течна капка върху хоризонтална плоскост и течност в съд в който е потопена частично вертикална пластина, която е неподвижна или движеща се с постоянна скорост. Предполага се наличието на симетрия на трифазната система, което редуцира задачите до двумерни. Изследвани са всички основни модели (6.15)- (6.18).

Първо е разгледан случая на спонтанна релаксация на капка върху гладка хоризонтална плоскост. Предполага се, че началната форма на капката е ососиметрична и влиянието на гравитацията е пренебрежимо малко. Това води до

наличието на връзка между обема на капката  $V$ , радиуса на основата  $R$  и ъгъла на контакт  $\theta$ . За всеки един момент от време  $t$  имаме:

$$(7.1) \quad \pi R^3(t) - 3V\Phi(\theta(t)) = 0,$$

където

$$(7.2) \quad \Phi(\theta(t)) = (1 - \cos^2 \theta(t))^{3/2} / (2 - 3 \cos \theta(t) + \cos^3 \theta(t)).$$

Отчитайки симетрията на задачата, между радиуса на основата  $R$  и ъгъла на контакт  $\theta$  за (6.28) имаме връзката:

$$(7.3) \quad \cos \theta_{eq} - \cos \theta = \frac{\psi}{\gamma_{lf}} \frac{dR}{dt}$$

В гл. 7. е получено решение на системата (7.1) (7.3) при малко начално отклонение на радиуса от равновесния радиус на капката. Тук ще представим резултата за комбиниран модел на дисипация, определен от коефициента  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , в който хидродинамичната вискозна дисипация  $\psi_2$  се описва от модификацията на Seaver and Berg (1994):

$$(7.4) \quad \psi_2 = 6\eta\Phi(\theta(t)) \ln(R(t)/h_m),$$

а  $\psi_1 = \xi$ . При така използваните  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , (7.3) приема вида:

$$(7.5) \quad \cos \theta_{eq} - \cos \theta = \frac{\xi + 6\eta\Phi(\theta(t))}{\gamma_{lf}} \ln\left(\frac{R(t)}{h_m}\right) \frac{dR(t)}{dt}.$$

Получено е асимптотично решение  $R(t) = R_{eq}(1 + r(t))$ ,  $|r(t)| \ll 1$ , на (7.5) за случая на малки начални отклонения  $r_0 \equiv r(0)$  от равновесния радиус  $R_{eq}$  на капката. За  $r(t)$  е получено

$$(7.21) \quad r(t) = r_0(1 - r_0 C_1) \exp(-t/\tau) + r_0^2 C_1 \exp(-2t/\tau) + O(r_0^3),$$

където

$$\tau = (B_1 + B_2 \Phi_{eq} \ln(R_{eq}/h_m)) / A_1, \quad C_1 = (2 - A_2/A_1) - \frac{B_2 \Phi_{eq}}{A_1 \tau} \left(1 + 3 \ln \frac{R_{eq}}{h_m}\right),$$

$$A_1 = (2 + \cos \theta_{eq})(1 - \cos^2 \theta_{eq}) / R_{eq}, \quad A_2 = 3 \cos^2 \theta_{eq} + 4 \cos \theta_{eq} + 2,$$

$$B_1 = \xi / \gamma_{lf}; \quad B_2 = 6\eta / \gamma_{lf}.$$

Чрез (7.21) е получен  $\cos \theta$ , който отново е сума на експоненциални функции със

същите релаксационни времена:

$$(7.22) \quad \cos \theta(t) = \cos \theta_{eq} + r_0 A_2 R_{eq} (1 - r_0 C_1) \exp(-t/\tau) + \\ \left( A_1 C_1 + r^2 R_{eq} (2A_1 - A_2) (1 - r_0 C_1)^2 \right) \exp(-2t/\tau) + O(r_0^3)$$

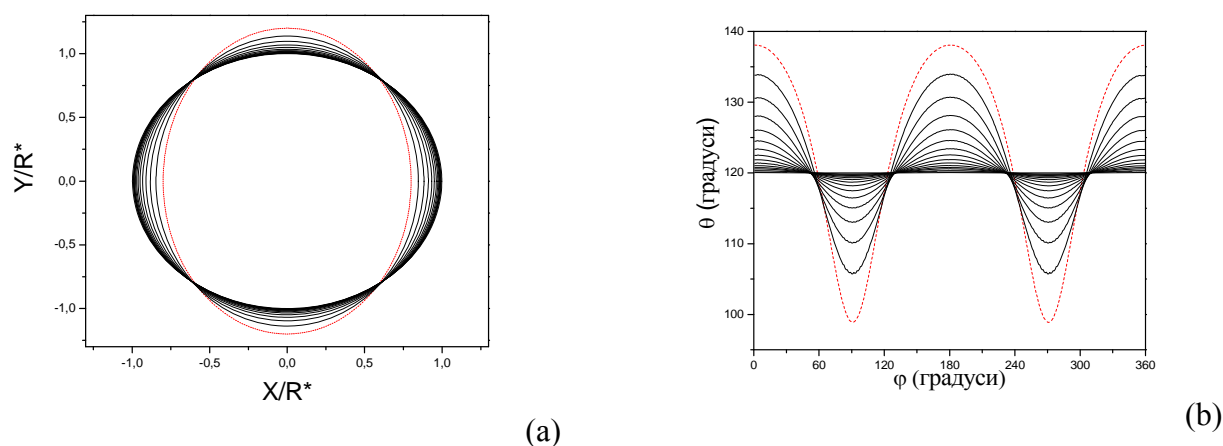
По подобен начин са получени и решения за релаксацията на контактната линия и на трифазния контактен ъгъл на течност в контакт с вертикална пластина. За тази геометрия са получени асимптотични решения за релаксацията за случаите, когато пластината е неподвижна и за случая, когато тя се движи (потопя или изтегля) с постоянна скорост. За всички модели на дисипация, получените решения за релаксацията на височината на меникуса и на контактния ъгъл имат вид подобен на вида на получените решения (7.21), (7.22) за релаксация на капка. Полученото решение показва, че и при движение на вертикална пластина в съд с течност, контактната линия и контактния ъгъл в разнообразните модели, описващи съпротивлението към преместване на контактната линия, се изменят във времето по функция, която е сума от няколко експоненти.

За различните модели на дисипация (6.15) – (6.18) и за комбинирани модели е изследвана връзката между критичния равновесен ъгъл при който се губи устойчиво равновесие и равновесния ъгъл. Получените асимптотични решения за равновесните височина и контактен ъгъл, за релаксационните времена като функция на скоростта на пластината, както и решенията за критичните скорости дават възможност за многокритериално тестване на моделите на дисипация, свързани с движението на контактната линия. В Дисертацията това е показано като са използвани експерименталните резултати на Delon *et al.* (2008), където има експериментална информация за всички изброени функции. В нея се разглежда вертикално изтегляне на твърда силиконова пластина с постоянна скорост  $u$  от съд с течност. Направени са сравнение на различните модели. Получено е, че моделът (6.15) добре апроксимира експерименталните данни за височината и релаксационното време, но дава критична скорост (при която статичното решение губи устойчивост) ~40% по-голяма от експерименталните резултати. Моделите (6.17), (6.18) не апроксимират добре експерименталните данни, като критичната скорост е около два пъти по-малка от критичната скорост, получена експериментално. Най-добро приближение дават комбинираните модели.

## Глава 8. 3D числено изследване на квазистационарно движение на течност, при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия

Чрез използването на числения пакет от Гл. 10. е реализирана програма за изследване на квазистатични движения. Числените резултати за релаксация на капка и за изтегляне на пластина от съд с течност са представени в Гл. 8. Численият метод използва крайно мерна апроксимация по времето и по пространството на задачата. Във всеки момент от време, в квазистатичен режим, трифазната система се определя от положението на повърхностите течност/твърдата фаза и течност/флуидна среда. В задачите, които се решават, първата е зададена аналитично, а втората се апроксимира чрез множество от триъгълни елементи. При фиксирана контактна линия и обем на течността, чрез числения алгоритъм от Гл. 10. се намира формата на свободната повърхност с минимална енергия. Тя определя моментните локални стойности на контактния ъгъл  $\theta(\mathbf{R})$ , който фигурира в уравнението (6.28) за движението на всяка една точка  $\mathbf{R} \in l$  от контактната линия. Реализира се преместване на контактната линия съгласно (6.28) след което алгоритъма се повтаря.

Получено е решение за релаксацията на капка на хоризонтална плоскост за модела на дисипация (6.1) за няколко различни начални форми на контактната линия: за кръгла линия, за елипсовидна линия, за кръгла контактна линия която е деформирана в няколко участъка.

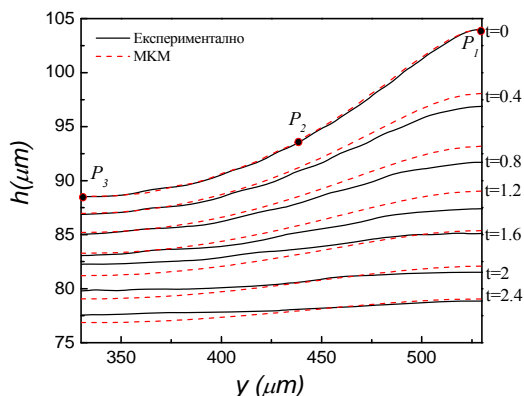


**Фиг. 8.5.** (a) Контактните линии и (b) локалните контактни ъгли в полярна координатна система на капка в процес на релаксация през интервали от безразмерно време 0.2. С пунктирна линия на (a) е показана началната елипсовидна контактна линия, а на (b) локалният контактен ъгъл на началната форма.

На Фигури 8.5. са показани получените числени резултати за  $\theta_{eq} = 120^\circ$ ,

безразмерен обем е  $V \approx 5.44$  за (а) изменението на контактната линия в процеса на релаксация (с пунктирна линия е показана началната елипсовидна контактна линия) и (b) на контактните ъгли за цялата контактна линия, като функция от полярния ъгъл в координатна система  $(r, \varphi)$  с център - центъра на равновесната кръгла контактна линия. Показаните функции са през интервал от безразмерно време 0.2.

Получени са решения за релаксацията на контактната линия при изтегляне и при потапяне на вертикална хомогенна пластина в съд с течност с постоянна скорост за начално периодично деформирана контактна линия за модела на дисипация (6.15). Направени са сравнения с експерименталните резултати, публикувани в Delon *et al.* (2008). При сравняването с експериментите е използвано, че  $\theta_{eq} = 51.5^\circ$ , а  $\xi$  е определено чрез статичната безразмерна височина  $h_{st}$  определена експериментално при дадена скорост на движение на пластината.



**Фиг. 8.11.** Част от контактните линии в хода на релаксацията през интервал от време  $\Delta t = 0.4s$  получени експериментално - непрекъснати линии; и числено за модела на дисипация (6.15) (МКМ, молекуло-кинетичен модел) - пунктирани линии.

С непрекъснати линии на Фиг. 8.11. са показани част от контактните линии, отговарящи на ширина от половин период, в процеса на релаксация през интервал от време  $\Delta t = 0.4s$  при движение на пластината със скорост  $Ca=0.00476$ , получени експериментално и показани на Фиг. 5(b) в Delon *et al.* (2008). Използвайки експерименталния резултат за началното състояние на контактната линия е конструирана стартова апроксимация на свободната повърхност за числения 3D алгоритъм с период по  $y$  от  $400\mu m$ . На Фиг. 8.11. с пунктирани линии са показани получените резултати за движението на контактната линия чрез числения 3D алгоритъм, за съответстващите на показаните на фигурата от експеримента моменти от време. Използвайки различни методи за оценка на близостта между получените експериментално и числено резултати е направено сравнение и анализ.



Анализирана е релаксацията на контактната линия при наличие на периодични дефекти чрез релаксационните времена на коефициентите в реда на Фурие. Освен зависимостта между релаксационните времена, е изследвана и зависимостта им от безразмерната скорост  $Ca$  и от периода  $\lambda$ . Чрез числения алгоритъм, разработен в Гл. 10., са изследвани и нелинейните ефекти за зависимостта на трите първи моди на скоростта на релаксация от  $Ca$ . За целта, деформацията на началната контактна линия се увеличава и след получаване на решението на нейната релаксация се изследват съответните моди.

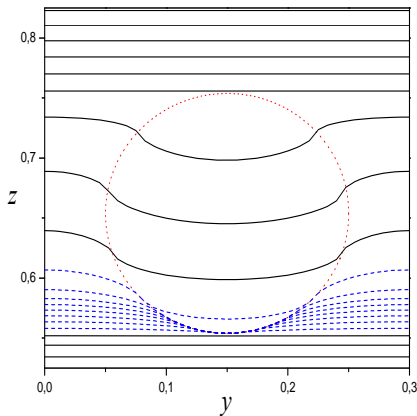
В Гл. 8 е получено числено решение за случая на движение на контактната линия по хетерогенна повърхност. За Вилхелм геометрия е изследвана динамиката при наличие на периодични дефекти с резки граници на движещата се пластина. Особеностите за статиката на контактната линия при наличието на контакт с подобен тип хетерогенни твърди повърхности бяха разгледани в Гл. 3. В моделите на движение на контактната линия, базиращи се на подхода на дисипация на контактната линия, особеностите, свързани с наличието на променящи се рязко повърхностни напрежения се проявят отново. Това е свързано с факта, че повърхностните напрежения участват в условието за движение на контактната линия (6.28). При наличието на хетерогенна твърда повърхност с резки граници между различните материали условието (6.28) може да се използва за точките от контактната линия намиращи се на границите между дефектите само след проверка дали тяхно движение е възможно и указание на посоката, в която то може да се реализира. Последователното прилагане на вариационния подход от Гл. 3. за статиката и от Гл. 6. за квазистатичната динамика дава възможност чрез комбиниране на резултатите да се получат уравненията, описващи поведението на системата в разглеждания тук случай. В общия случай, при реализиране на вариационния подход в механиката, имаме своеобразен дуализъм на уравненията, описващи поведението на системата. В континуалната система, която е предмет на изследване, априори не е ясно дали дадена точка от контактната линия е неподвижна или в движение. Възможно е тя понякога да се движи, понякога да остава в покой. Експериментално подобно поведение е добре известно и терминологично е определено като “stick-slip” (прилепване-приплъзване) поведение (Dussan V., 1979). Чрез използването на вариационен подход, указаната

дуалност е включена непосредствено във вариационните уравнения. Варирайки всяка една точка от апроксимацията на контактната линия се извършва проверка дали положението ѝ е състояние на равновесие. Ако то е такова, то точката остава неподвижна, ако не е, точката се придвижва съгласно динамичните условия.

Този метод е интегриран в числения алгоритъм от Гл. 10 и с него е изследвана задачата за движение по двукомпонентна хетерогенна пластина. Пластината е от хомогенен материал на която течността формира равновесен контактен ъгъл  $\theta_{eq}^{(1)} = 70^\circ$  по който са разположени кръгли петна с радиуси  $a = 0.1/l_c$ , от друг материал върху които течността формира равновесен контактен ъгъл  $\theta_{eq}^{(2)} = 110^\circ$ , с центрове образуващи квадратна решетка с размер  $\lambda = 0.3/l_c$ .

Ще представим резултати за модела на дисипация на контактната линия, в който коефициента  $\psi$  в (8.28) се описва от (6.15). Ще предпологаме, че  $\xi$  е еднаква и за двата материала константа. За този модел характерно разстояние е капилярната дължина,  $l_c$ ; характерно време  $\tau = l_c \xi / \gamma_{lf}$ . Безразмерната скорост е  $u = u \xi / \gamma_{lf}$ . Числените изследвания при  $\lambda = 0.3/l_c$  показват, че в интервал от скорости на движение на пластината  $[u_a^*, u_r^*]$ , движението на контактната линия достига периодичен по времето режим на движение. Височината на контактната линия  $h = h(y, t)$  в този случай е периодична функция по времето и по  $y$ . Извън този интервал от скорости на движение на пластината периодичен режим не се достига, а части от контактната линия постепенно се увеличат от движението на пластината. При скорости на движение на пластината от интервала  $[u_a^*, u_r^*]$ , в координатна система, която е неподвижна спрямо пластината, картината на движението на контактната линия се характеризира от преминаването ѝ през квадрат от пластината с размери  $\lambda$ . Такъв квадрат е показан на Фиг. 8.18. с пунктирана линия. На Фиг. 8.18. е показано полученото периодично движение на контактната линия при безразмерна скорост  $u = 0.1$  (пластината се изтегля от течността) в координатна система, неподвижна спрямо пластината в квадрат от пластината със страна  $\lambda$ . На фигурата са показани контактните линии през интервал от безразмерно време 0.15. В използваната координатна система контактната линия във всеки следващ момент от време се намира под (или частично съвпада) с тази от предишния момент от време. С линия от точки е показан кръга в който равновесният контактен ъгъл е  $110^\circ$ . С пунктирани линии са показани контактните

линии при които част от контактната линия е прилепнала неподвижно по контура на кръга.



**Фиг. 8.19.** Квадрат от повърхността на вертикалната пластина със страна равна на периода  $\lambda$  върху който е показан кръгъл дефект и положението на контактната линия през интервал от безразмерно време  $\Delta t = 0.15$ . Координатната система е неподвижна спрямо дефекта. С пунктирани линии са показани контактните линии при които част от контактната линия е прилепнала неподвижно по контура на кръга.

Получена е представляващата интерес зависимостта на усреднената капилярна сила, с която течността действа върху пластината като функция на скоростта на пластината. Чрез нея е определен ефективния контактен ъгъл който се формира на хетерогенна повърхност като функция на скоростта.

## Глава 9. Отчитане на инерцията в модела на дисипация на контактната линия. Капилярно-гравитационни вълни

Всички изследвания на движението на трифазната система, представени досега бяха направени при предположение за квазистатичност на движението на течността. Актуално е в изследванията на моделите да се включат и инерциалните ефекти. Удобна система за изследване на влиянието на инерцията са вълновите движения на свободната повърхност на течността. В Гл. 9 е разгледана система, която представлява течност в отворен съд с вертикални стени и хоризонтално дъно. При наличието на хистерезис на контактния равновесен ъгъл, уравнението за движение (6.28) се модифицира. Нека в интервала  $[\theta_{eq}^r, \theta_{eq}^a]$  контактния ъгъл е равновесен. Тогава вместо (6.28) ще е изпълнено по-общото условие, определящо поведението на точките от контактната линия:

$$(9.3) \quad v_n(\mathbf{R}) = \lambda \Phi(\theta_{eq}^a, \theta_{eq}^r, \theta); \Phi(\theta_{eq}^a, \theta_{eq}^r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{if } \theta \in [\theta_{eq}^r, \theta_{eq}^a] \\ \cos \theta_{eq}^a - \cos \theta & \text{if } \theta > \theta_{eq}^a, \mathbf{R} = A_0, A_a. \\ \cos \theta_{eq}^r - \cos \theta & \text{if } \theta < \theta_{eq}^r \end{cases}$$

$\lambda = \gamma_{lf} / \xi$ . Целта на гл. 9 е да се получи за първи път решение на (9.3) за капилярно-

гравитационни вълни. Ще се ограничим със случая на малки амплитуди на колебанията на свободната повърхност. В този случай може да предпологаеме, че вискозната дисипация в обемната област на течността е пренебрежимо малка, а в системата доминира дисипацията, свързана с движението на контактната линия. При указаното предположение в обемната течна фаза може да използваме модела на идеална течност.

Ще разгледаме двумерните колебания на несвиваема течност в правоъгълен канал с вертикални стени, отстоящи на разстояние  $a$ , под действието на повърхностните сили и силата на гравитацията. В двумерна постановка свободната повърхност, се определя от  $l = \{x, h(x, t)\}$  с граници  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{A}_a$ . Разстоянията ще обезразмерим чрез  $a$ , времето чрез  $\sqrt{a/g}$ , скоростта чрез  $\sqrt{ag}$ , ускорението чрез  $g$ . Ще предпологаеме, че в областта на течността  $S = \{R(x, y)\}$  скоростта може да се представи чрез потенциал  $\varphi$ ,  $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$ . Ще използваме безразмерно повърхностно напрежение  $\gamma_{lf} = \gamma_{lf} / \rho g a^2$ ,  $\lambda = \lambda \sqrt{ag}$  и нормиран потенциал  $\varphi = \varphi / a \sqrt{ag}$  (за безразмерните и нормираните величини ще използваме същите означения, както и за размерните). Потенциалът  $\varphi$  в областта на течността  $S$  трябва да удовлетворява уравнението на Лаплас:

$$(9.7) \quad \nabla^2 \varphi(R, t) = 0, \quad R(x, y) \in S.$$

На дъното  $L_{bot}$  и на стените  $L_0, L_a$  на съда трябва да се удовлетворява условието за отсъствие на проникване на течността в твърдото тяло

$$(9.8) \quad \partial \varphi(R, t) / \partial x = 0, \quad R \in \{L_0, L_a\}, \quad \partial \varphi(R, t) / \partial y = 0, \quad R \in L_{bot}.$$

От (9.3) в граничните точки на  $l$  за потенциала  $\varphi$  получаваме:

$$(9.9) \quad \partial \varphi(A_0, t) / \partial y = \lambda \Phi(\theta_{eq}^a, \theta_{eq}^r, \theta_0), \quad \partial \varphi(A_a, t) / \partial y = \lambda \Phi(\theta_{eq}^a, \theta_{eq}^r, \theta_a),$$

където  $\theta_0, \theta_a$  са контактните ъгли в точките  $A_0, A_a$  съответно. Динамичното условие във вътрешните точки от границата на течността  $l$  се получава от уравнението на Бернули и за разглеждания случай има вида:

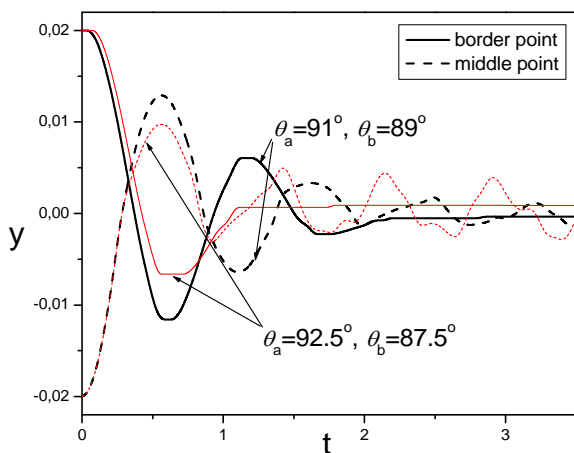
$$(9.10) \quad \partial \varphi(\mathbf{R}^l, t) / \partial t = -v^2(\mathbf{R}^l, t) / 2 - R_y^l + \gamma_{lf} h_{xx} / (1 + h_x^2)^{3/2}; \quad \mathbf{R}^l \in l / \{\mathbf{A}_0 \cup \mathbf{A}_a\},$$

а в граничните точки от нея (точките от контактните линии) - (9.3).

За числено изследване на динамиката на повърхностните вълнови движения ще използваме модификация на стандартния метод на локалните вариации, разработена от Илиев (2007). Разгледан е случая, когато безразмерното

повърхностно напрежение,  $\gamma_{lf} = \gamma_{lf} / \rho g a^2$ , е  $\gamma_{lf} = 0.1$ .

Първо е разгледан случая, когато няма хистерезис на контактния ъгъл и  $\theta_{eq}^a = \theta_{eq}^r = 90^\circ$ . Изследвана е зависимостта на честота на колебанията и на коефициента на затихване като функция от коефициента на дисипация. Направено е сравнение с асимптотичните резултати на Hocking (1987). Получено е, че с намаляване на  $\lambda$  затихването на осцилациите (за един период) се увеличава. При големи стойности на параметъра  $\lambda$  движението на граничната и на централната точка са в противофаза и амплитудите на колебанията им са почти еднакви. При намаляване на параметъра  $\lambda$  тези характеристики се променят. При много малки  $\lambda$ , граничната точка не извършва колебания около нулевата височина. Движението ѝ може да се разглежда като сума от затихващи колебания с малка амплитуда и бавно движение в посока на нулевата височина. С числения алгоритъм са изследвани капилярно гравитационни вълни и когато равновесният контактен ъгъл не е  $90^\circ$  ( $\theta_a = \theta_r \neq 90^\circ$ ), както и случая на наличие на хистерезис на контактния ъгъл.



**Фиг. 9.7.** Движение на граничната лява точка (с непрекъснатата линия) и на централната точка (с пунктирна линия) за  $\theta_a = 91^\circ, \theta_r = 89^\circ$  и за  $\theta_a = 92.5^\circ, \theta_r = 87.5^\circ$ ;  $\lambda=2$ , началната амплитуда на колебанията е 0.02.

На Фиг. 9.7. са показани получените резултати за движението на граничната лява точка (с непрекъснатата линия) и на централната точка (с пунктирна линия), от линията, определяща свободната повърхност на течността за  $\theta_a = 91^\circ, \theta_r = 89^\circ$  и за  $\theta_a = 92.5^\circ, \theta_r = 87.5^\circ$ . Коефициента, определящ дисипацията на енергия е  $\lambda=2$ , а началната амплитуда на колебанието - 0.02. На участъците, в които непрекъснатите линии, показани на фигурата, са хоризонтални отсечки, граничната точка е неподвижна (но в същото време контактния ъгъл се променя) и в тези периоди от време няма дисипация на енергията в системата. В този модел се наблюдава

последователност от прилепване и движение на граничната точка (stick-slip motion). Когато амплитудата намалее и колебанията са толкова малки, че контактния ъгъл остава в рамките на хистерезиса, колебанията преминават в режим на движение със закрепени крайни точки без дисипация на енергията.

В заключение в Гл. 9. е разгледан и случая, в който съпротивление към преместване на контактната линия е включено в модела на чисто гравитационни вълни на движение на течност в канал.

## **Глава 10. Метод на локалните вариации за изследване на стационарни задачи със свободни граници в механиката на флуидите**

За ефективно числено изследване на получените вариационни уравнения за равновесие и за квазистатично движение се изисква разработката на съответен числен метод. Наличието на необратимост на виртуалната работа, свързани с особеностите на поведението на твърдата фаза затруднява използването на диференциална постановка на задачите. Това определи необходимостта от разработката на числен вариационен принцип, който позволява ефективно да бъдат изследвани поставените в Гл. 1-9 задачи. Ориентиран към задачи от теорията на капилярността, в гл. 10 е разработен числен алгоритъм, базиран на метода на Локалните вариации.

При реализацията на метода на локалните вариации се определят измененията на всички компоненти на енергията и обема на течността при апроксимация на виртуалните вариации на точките от системата директно чрез използване на формули от аналитичната геометрия. Това дава възможност да се включат в моделите разнообразни функции от тези величини, да се изследва влиянието на разнообразни сили, енергии, както и налагането на различни типове връзки и ограничения на измененията на системата. Алгоритъма използва апроксимация на най-общата постановка на задачите за равновесие в която не се изискват ограничения за гладкост на функциите, обратимост на виртуалните премествания, и др. Численият метод дава възможност да се получат решения без ограничения на вида на равновесните състояния и на структурата на повърхността на твърдото тяло, както за класическия капилярен модел, така и за негови модификации, свързани с добавянето на условия за вида на възможните

деформации на разглежданата система. Последното отчита и възможното действие по контактната линия на сили и енергии, препятстващи свободното ѝ придвижване. Това дава възможност чрез предложения числен алгоритъм да се изследва недостатъчно изучените континуални модели на явлението хистерезис на контактния ъгъл, на наличието на нерегулярност на преместванията на контактната линия и др. Численият метод представлява обобщение на метода на локалните вариации, предложен от Черноусько (1965), чрез използване на локална координатна система. Реализирана е възможност в хода на варирането на конфигурацията на системата обемът на течността да не се променя.

Чрез предложения числен метод се решава пълната тримерна задача за намиране на множеството равновесни форми на система от несвиваема течност във флуидна среда в контакт с твърдо тяло, под действие на гравитационните и повърхностни сили без налагането на каквито и да е ограничения на вида на междуфазовите повърхности. Произволна повърхност в 3D в предлагания метод се дискретизира чрез множество от триъгълници. За стартирането на минимизационния алгоритъм първо се реализира апроксимация на някаква начална форма на двумерна повърхност в тримерното пространство, която заедно с повърхността на твърдото тяло ограничава изисквания се от началните данни обем на течността и удовлетворява граничните условия. В редица случаи е трудно да бъде пряко получена подобна апроксимация. В този случай първоначално се определя апроксимация на повърхност която не удовлетворява обемните и гранични условия. След това, използвайки възможностите на алгоритъма за определяне на изменението на обема при вариране на повърхността, както и възможността за избор на посока на вариране, се получава нова повърхност, вече удовлетворяваща обемните условия. След като е получена апроксимация, която удовлетворява обемните и гранични условия, алгоритъмът генерира последователност от крайни деформации но формата на повърхността, които определят и последователност от повърхности, такива, че при деформациите се запазват обемните и гранични условия и се намалява свободната енергия. Така итеративно се реализира последователност от повърхности, сходяща се към на локалния минимум на свободната енергия при зададените условия.

## Научни Приноси

1. Изведени са вариационни уравнения, описващи равновесието на трифазна система течност/флуид/твърдо тяло при наличие на съпротивление към преместване на контактната линия.
2. Изследвано е множеството от равновесни течни капки на хоризонтална и на наклонена плоскост при наличие на хистерезис на контактния ъгъл.
3. Изведени са вариационни уравнения за равновесието на трифазна система течност/флуид/хетерогенно твърдо тяло при наличие на резки промени на физикохимичните свойства. Изследвана е валидността на уравнението на Каси за двукомпонентна твърда повърхност с резки граници между материалите.
4. Изследвани са особеностите на равновесието на течни капка върху многокомпонентна хетерогенна и върху грапава подложка.
5. Разработен е нов метод за определяне на локалния трифазен контактен ъгъл.
6. Изведени са вариационни уравнения на квазистатичната динамика на трифазна система течност/флуид/твърдо тяло при отчитане на дисипацията на енергия, свързана с движението на контактната линия.
7. Получени са нови асимптотични решения за квазистатичното движение на течност при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия за режим на частично омокряне.
8. Изведени са вариационни уравнения за квазистатичната динамика за системи с резки промени на физикохимичните параметри. Изследвани са 3D квазистатичните движения на течност със свободна граница при отчитане на дисипацията на енергия при движение на контактната линия.
9. Получени са нови решения за гравитационно-капилярни вълни, в които се отчита наличието на дисипация на енергия.
10. Разработен е нов ефективен числен алгоритъм за изследване на равновесието на трифазни системи течност/флуид/твърдо тяло на базата на пряка апроксимация на виртуалните премествания и на свързаната с тях виртуална работа.

## Литература

Adamson, A.W., A.P. Gast (1997) Physical Chemistry of Surfaces, 6th ed., Wiley, New York, 784 pp.



- Blake, T. D., J. M. Haynes (1969) Kinetics of Liquid / Liquid Displacement, *J. Colloid Interface Sci.*, **30**, 421-423.
- Blake, T.D. (2006) The physics of moving wetting lines, *J. Colloid Interface Sci.*, **299**, 1-13.
- Bonn, D., Eggers, J., Indekeu, J., Meunier, J., E. Rolley (2009) Wetting and spreading, *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 739-805.
- Brown, R. A., Orr, F. M., Jr., L. E. Scriven (1980) Static drop on an inclined plate: analysis by finite element method, *J. Colloid Interface Sci.*, **73**, 76-87.
- Cassie, A. B. D. (1948) Contact Angles, *Discuss. Faraday Soc.*, **3**, 11-16.
- de Gennes, P. G. (1985) Wetting: statics and dynamics, *Rev. Mod. Phys.*, **57**, 827-863.
- Delon, G., J. H. Snoeijer, B. Andreotti, M. Fermigier (2008) Relaxation of a Dewetting Contact Line. Part 2. Experiments, *J. Fluid Mech.*, **604**, 55-75.
- Dussan V., E. B. (1979) On the Spreading of Liquids on Solid Surfaces: Static and Dynamic Contact Lines, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **11**, 371-400.
- Gibbs, J. W. (1875-1878) On the equilibrium of heterogeneous substances, *Trans. Conn. Acad.*, **3**, 108-248, 343-524.
- Hocking, L. M. (1987) The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary, *J. Fluid Mech.*, **179**, 253-266.
- Huh, C., L. E. Scriven (1971) Hydrodynamic model of steady movement of a solid/liquid/fluid contact line, *J. Colloid Interface Sci.*, **35**, 85-101.
- Iliev, D. (2007) Local variation method to calculate two dimensional gravity waves in container, In: *Proc. 36 Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians*, 240-245.
- Johnson, R.E., R.H. Dettre (1964) Contact angle hysteresis. I. Study of an idealized rough surface, *Adv. Chem. Ser.*, **43**, 112-135.
- Lanczos, C. (1970) *The Variational Principles of Mechanics*. 4th ed, University of Toronto Press, Toronto, 418 pp.
- Li, D., A.W. Neumann (1990) Determination of line tension from the drop size dependence of contact angles, *Colloids Surf.*, **43**, 195-206.
- Rotenberg, Y., Boruvka, L., A.W. Neumann (1984) The Shape of Non-Axisymmetric Drops on Inclined Planar Surfaces, *J. Colloid Interface Sci.*, **102**, 424-434.
- Seaver, A. E., J. C. Berg (1994) Spreading of a Droplet on a Solid Surface, *J. Appl.*

- Polymer Sci.*, **52**, 431-435.
- Wenzel, R. N. (1936) Resistance of Solid Surfaces to Wetting by Water, *Ind. Eng. Chem.*, **28**, 988-994.
- Войнов, О.В. (1976) Гидродинамика смачивания, *ДАН СССР, Механика Жидкости и Газа*, № 5, 76-84.
- Ландау, Л.Д., Е.М. Лифшиц (1986) Гидродинамика, 3-е изд., Москва, Наука, 736 с.
- Моисеев, Н.Н., В.В. Румянцев (1965) Динамика тела с полостями содержащими жидкость, Москва, Наука, 439 с.
- Сумм, Б. Д. (1999) Гистерезис смачивания, *Соровский образовательный журнал*, 7, 98-102.
- Френкель, Я. И. (1948) О поведении жидких капель на поверхности твердого тела, *ЖЭТФ*, **18**, 659-667.
- Черноусько, Ф.Л. (1965) Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач, *Ж. Вычисл. матем. и матем. физ.*, **5**, No 4, 749-754.

#### Списък на публикации по дисертацията

- Д1. Илиев, С. Д., Об одной модификации метода локальных вариаций, *В-к Моск. у-та, сер. 15, Выч. математика и кибернетика*, 1991, N 4, с. 55 -60.
- Д2. Iliev, S. D., Iterative Method for the Shape of Static Drops, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **126** (1995) 251-265.
- Д3. Iliev S., Non-axisymmetric static drops on a horizontal plane: Numerical analysis, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 3 (1996) 66-74.
- Д4. Iliev, S. D., Modeling the degree of stability of the equilibrium state of a liquid droplet in contact with a solid, *Доклади на БАН*, **49**, кн. 7-8 (1996) 19-22.
- Д5. Iliev, S.D., Static Drops on an Inclined Plane: Equilibrium Modelling and Numerical Analysis, *J. Colloid Interface Sci.*, **194** (1997) 287-300.
- Д6.а. Илиев, С. Д., Об одной модели гистерезиса капиллярного угла контакта, *Журнал Вычислительной математики и математической физики*, **38** (1998) 674-681.
- Д6.б. Iliev, S.D., A Hysteresis Model for the Capillary Contact Angle, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **38** (1998) 674-681.
- Д7. Iliev, S. D., The effects of resistance to shift of the equilibrium state of a liquid

- droplet in contact with a solid, *J. Colloid Interface Sci.*, **213** (1999) 1-19.
- Д8. Iliev, S.D., Stick-slip behavior of the liquid drops on an inclined plane: A Numerical example, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **30**, No. 4 (2000) 24-35.
- Д9. Iliev, S., Simulated “stick-slip” behavior of the contact line of the liquid drop on a horizontal plate, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **31**, No. 1 (2001), 31-49.
- Д10. Iliev, S., Numerical investigation of the static liquid drops on heterogeneous solid surface Part I. With radial patches, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **31**, No. 4 (2001) 18-26.
- Д11. Iliev, S., Numerical investigation of the static liquid drops on heterogeneous solid surface. Part II. With quadrilateral patches, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **32**, No. 1 (2002) 15-20.
- Д12. Pesheva, N., S. Iliev. Numerical Verification of the Cassie’s Equation for Well Defined Heterogeneous Substrates with “Mesa” defects, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **33**, No. 2 (2003) 29-40.
- Д13. Iliev, S., N. Pesheva. Wetting Properties of Well Structured Heterogeneous Substrates, *Langmuir*, **19** (2003) 9923-9931.
- Д14. Iliev, S., N. Pesheva. Asymptotic Solutions for the Quasi-Static Relaxation of Liquid Drops, *Proc.of the 10<sup>th</sup> Jubilee National Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Varna, 13-16 September 2005. pp. 479-482.
- Д15. Iliev, S., N. Pesheva. Asymptotic solutions of the quasi-static relaxation of liquid drops taking into account the dissipation during the contact line motion, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **35**, No. 4 (2005) 3-12.
- Д16. Iliev, S., Pesheva, N., V. Nikolayev. Quasistatic relaxation of arbitrarily shaped sessile drops, *Phys. Rev. E* **72** (2005) 011606.
- Д17. Iliev, S., N. Pesheva. On the quasi-static relaxation of a drop in a combined model of dissipation, *Langmuir*, **22** (2006) 1580-1585.
- Д18. Iliev S., N. Pesheva. Nonaxisymmetric drop shape analysis and its application for determination of the local contact angles, *J. Colloid Interface Sci.* **301** (2006) 677-684.
- Д19. Iliev S., Pesheva N., V. S. Nikolayev. Quasi-static motion of the contact line in the Wilhelmy-plate geometry: contact line dissipation model, *Proc. 36th Spring*

- Conference "Mathematics and education in mathematics" of the Union of Bulgarian mathematicians, St. Konstantin and Elena resort, Varna, April 2-6, 2007, 246 - 251.*
- Д20. Iliev, D., S. Iliev. The wedge dissipation effects in surface gravity waves in a channel, In: *Proc. 37 Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovetz, April 2-6, 2008, 201-206.*
- Д21.a. Iliev, S., Pesheva, N., V. S. Nikolayev. Dynamic modelling of the deformed contact line under partial wetting conditions: quasi-static approach, *Proc. European Coating Symposium 2007, Paris, 12-14/9 2007, 121-124;*
- Д21.б. Iliev, S., Pesheva, N., V. S. Nikolayev. Dynamic modelling of the deformed contact line under partial wetting conditions: quasi-static approach, *Eur. Phys. J. Special Topics* **166** (2009) 181-184.
- Д22. Iliev, S., Pesheva, N., V. S. Nikolayev. Dynamic modelling of contact line deformation: comparison with experiment, *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 021605.
- Д23. Iliev, D., S. Iliev. Dumping of capillary-gravity waves in a channel: the wedge dissipation effect, In: *Proc. 38 Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovetz, April 1-5, 2009, 178-183.*
- Д24. Iliev, S., Pesheva, N., D. Iliev. On the quasi-static relaxation of the contact line in the Wilhelmy-plate geometry: asymptotic solutions of a contact line dissipation model, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **39**, No. 2 (2009) 11-20.
- Д25. Iliev, S., Pesheva, N., V. Nikolayev. Dynamic study of the contact angle hysteresis in the presence of periodic defects, *11-th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Borovets, Bulgaria, 2-5 September 2009, ID:154-307-1-PB* (2009).
- Д26. Iliev, S., Pesheva, N., D. Iliev. Relaxation of the contact line in the Wilhelmy-plate geometry: asymptotic solutions of a combined contact line dissipation model, *11-th National Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Borovets, Bulgaria, 2-5 September 2009, . ID:158-303-1-PB* (2009).
- Д27. Iliev, S., Pesheva, N., D. Iliev. Asymptotic solutions for the relaxation of the contact line in the Wilhelmy-plate geometry: The contact line dissipation approach, *Phys. Rev. E*, **81**, 011607 (2010).