С. Д. Илиев, Логика без законов противоречия и исключенного третьего. В: Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции. СПб, 1998, с. 128-131.

Логика без законов противоречия и исключенного третьего

Станимир Илиев

В классической формальной логике вместе с объектом A определяется и объект $\neg A$, интерпретируемый как отрицание A. При этом выполняются законы противоречия и исключенного третьего, т.е.

$$A \cap \neg A = \varnothing \quad \text{и} \quad A \cup \neg A = X, \tag{1}$$

X интерпретируется как универсум. В ряде случаев законы (1) сильно ограничивают богатство характеристик исследуемых объектов. Предложим формальную систему, в которой законы (1) не выполняются, а их нарушение имеет содержательный характер.

Построим такую формальную систему на теоретико-множественной основе. С каждым объектом $A \in X$, являющимся элементом универсума X, свяжем некую совокупность его характеристик /типов, видов, которым оно принадлежит, или свойств, которые оно имеет/. Это дает возможность для каждого объекта $A \in X$ определить класс объектов с близкими к A свойствами, имеющими общие с ним характеристики. Аналогично теории нечетких множеств [1], [2] с каждым объектом A свяжем функцию принадлежности. Для функционирования такой формально-логической структуры необходимо больше информации о характере и взаимосвязях между объектами универсума, чем в классической двузначной логике в которой объекты не имеют собственных характеристик.

Пусть на множестве X указана совокупность подмножеств

$$\Sigma = \{U_\alpha : \alpha = 1,2,...; U_\alpha \in X\}$$

обладающая таким свойством, что пересечение любого конечного числа множеств из Σ принадлежит Σ. Множество X не обязательно должно принадлежать Σ. Множества $U_\alpha \in \Sigma$ будем интерпретировать как объекты.

Для каждого U_α определим множество

$$\Sigma_\alpha = \{U_{\alpha_i} : i = 1,\ldots,n_\alpha; U_{\alpha_i} \in \Sigma; U_\alpha \in \Sigma_\alpha\} \tag{2}$$

которое будем интерпретировать как совокупность объектов, сравнимых с объектом U_α. Возможно, что для U_α и U_β при $\alpha \neq \beta$ будут отличаться множества Σ_α и Σ_β.

На множестве элементов из X для каждого объекта $U_\alpha \in \Sigma$ определим функцию принадлежности $\Phi_\alpha(x)$. Функции принадлежности полностью характеризуют объекты. Могут быть объекты, для которых множество сравнимых объектов (2) не содержит объекты, отличных от исходного объекта. Очевидно для таких объектов лишно вводить функцию принадлежности. Поэтому определим множество $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$, содержащее элементы $U_\alpha \in \Sigma$, для которых можно образовать множества $\Sigma_\alpha \neq U_\alpha$.

Для каждого $U_\alpha \in \hat{\Sigma}$ функция принадлежности $\Phi_\alpha(x)$ определим только на множество элементов

$$\Xi_\alpha(x) = \left\{ x \in U_\alpha \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{n_\alpha}} \right\}$$

принадлежащих объектам, сравнимых с объекта U_α, т.е. принадлежащих множеству Σ_α. Сначала с каждого объекта

$$U_{\alpha_i} \in \Sigma_\alpha, \quad U_{\alpha_i} \neq U_\alpha$$

свяжем число $y(U_\alpha, U_{\alpha_i})$ такое, что

$$y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) = 0 \qquad \text{если } U_{\alpha_i} \cap U_\alpha = \varnothing \quad \text{и}$$

$$0 < y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) < 1 \quad \text{если } U_{\alpha_i} \cap U_\alpha \neq \varnothing .$$

Число $y(U_\alpha, U_{\alpha_i})$ характеризует степень перекрытия признаков, свойств у объектов U_α и U_{α_i}. Ясно, что $y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) = y(U_{\alpha_i}, U_\alpha)$. Определим $\Phi_\alpha(x)$:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \text{не определена}, & \text{если } x \notin \Xi_\alpha, \\ 1, & \text{если } x \in \Xi_\alpha \text{ и } x \in U_\alpha, \\ p, & \text{если } x \in \Xi_\alpha \text{ и } x \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Пусть $x \in U^1 \in \Xi_\alpha, \ldots, x \in U^m \in \Xi_\alpha$. $\quad p \geq \max\limits_{i=1,\ldots,m} y(U_\alpha, U^i)$.

Равенство $p = \max\limits_{i=1,\ldots,m} y(U_\alpha, U^i)$ достигается, если

$U^i \cap U_\alpha = \varnothing$, для всех $i = 1, \ldots, m$.

Объекты, заданные посредством операции $\neg A$, $A \cup B$ и $A \cap B$ определим посредством задания на X функции принадлежности, отвечающие им.

$\neg A$ можно определить, задавая на X функцию принадлежности $\Phi_{\neg A}(x)$, которая равна:

$$\Phi_{\neg A}(x) = 1 - \Phi_A(x), \qquad \text{если } x \in \Xi_\alpha,$$
$$\text{не определена, если } x \notin \Xi_\alpha \qquad (3)$$

С объединением $A \cup B$ свяжем функцию принадлежности

$$\begin{aligned} \Phi_{A \cup B}(x) &= 1, && \text{если } \Phi_A(x) + \Phi_B(x) > 1 \text{ и } x \in \Xi_A \cap \Xi_B, \\ &= \Phi_A(x) + \Phi_B(x), && \text{если } \Phi_A(x) + \Phi_B(x) \le 1 \text{ и } x \in \Xi_A \cap \Xi_B, \qquad (4) \\ &\text{не определена,} && \text{если } x \notin \Xi_A \cap \Xi_B. \end{aligned}$$

С пересечением $A \cap B$ свяжем функцию принадлежности

$$\begin{aligned} \Phi_{A \cap B}(x) &= \Phi_A(x)\Phi_B(x), && \text{если } x \in \Xi_A \cap \Xi_B, \qquad (5) \\ &\text{не определена,} && \text{если } x \notin \Xi_A \cap \Xi_B. \end{aligned}$$

Функции $\Phi_{A \cup B}(x)$ и $\Phi_{A \cap B}(x)$ можно определить и посредством задания другого отображения $\Xi_A \cap \Xi_B \Rightarrow 0,1$.

В предложенной формально-логической структуре в общем случае будет иметь место:

$A \cup \neg A \neq X$,

а множество $X \setminus \Xi_A$ можно интерпретировать как "ни A ни не A". Множество объектов Σ_A можно интерпретировать как универсум из объектов по отношению к объекту A, и на нем при функции принадлежности, определенной вышеуказанным способом

$A \cup \neg A = \Sigma_A$.

В случае иного определения функции принадлежности, это условие может и не выполняться для каждого объекта $A \in \hat{\Sigma}$.

Как и в теории нечетких множеств

$A \cap \neg A \neq \varnothing$,

а функция принадлежности $\Phi_{A \cap \neg A}(x)$ можно получить комбинируя функции принадлежности (3) и (5).

Все U_α могут зависеть от некоторых параметров. В частности, один из них может быть охарактеризован как время.

Предложенная логическая структура имеет конструктивный характер. На универсуме X может и не быть задана топология.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976, 167с.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981, 207с.