С. Д. Илиев, Логика без законов противоречия и исключенного третьего. В: Современная логика: проблемы теории, истории и применения в науке. Материалы V Общероссийской научной конференции. СПб, 1998, с. 128-131.

Логика без законите за противоречие и за исключено трето

Станимир Илиев

В класическата формална логика заедно с обекта A се определя и обект $\neg A$, който се интерпретира като отрицание на A. Предполага се, че за в сила законите

$$A \cap \neg A = \varnothing \quad \text{и} \quad A \cup \neg A = X, \tag{1}$$

X се интерпретира като универсум. В редица случаи законите (1) силно ограничават богатството на характеристиките на изследваните обекти. Ще предложим формална система, в която законите (1) не са в сила, а тяхното нарушаване има съдържателен характер.

Ще построим такава система на теоретико-множествена основа. С всеки обект $A \in X$, който е елемент на универсума X, ще сържем съвкупност от негови характеристики /типове, видове, към които той принадлежи, или свойства, които притежава/. Това дава възможност за всеки обект $A \in X$ да определим клас от обекти с близки на A свойства, които имат общи с него характеристики. Както е прието в теорията на "размитите" множества [1], [2] с всеки обект A ще свържем функция на принадлежност. За функционирането на такава формално-логическа структура е необходимо повече информация за характера и връзките между обектите на универсума, отколкото в класическата двузначна логик.

Нека на множеството X е указана съвкупност от подмножества

$$\Sigma = \{U_\alpha : \alpha = 1,2,..; U_\alpha \in X\}$$

имаща свойството, че пресичането на произволно крайно количество на множества от Σ принадлежи на Σ. Множеството X не е задължително да принадлежи на Σ. Множествата $U_\alpha \in \Sigma$ ще интерпретираме като обекти.

За всяко U_α определяме множеството

$$\Sigma_\alpha = \{U_{\alpha_i} : i = 1,\ldots,n_\alpha; U_{\alpha_i} \in \Sigma; U_\alpha \in \Sigma_\alpha\} \tag{2}$$

което ще интерпретираме като съвупност от обекти, сравними с обекта U_α. Возможно е, че за U_α и U_β , $\alpha \neq \beta$ множествата Σ_α и Σ_β да се разичават.

На множеството елементи от X за всеки обект $U_\alpha \in \Sigma$ ще определим функция на принадлежност $\Phi_\alpha(x)$. Функциите на принадлежност напълно характеризират обектите. Може да съществуват обекти за които множеството сравними обекти (2) не съдържа обекти, различни от изходния обект. Очевидно е, че за такита обекти въвеждането на функция на принадлежност е излишно. Затова ще определим множество $\hat{\Sigma} \subset \Sigma$, съдържащо елементи $U_\alpha \in \Sigma$, за които може да се образува множество $\Sigma_\alpha \neq U_\alpha$.

За всяко $U_\alpha \in \hat{\Sigma}$ функцията на принадлежност $\Phi_\alpha(x)$ определяме само на множеството от елементи

$$\Xi_\alpha(x) = \left\{ x \in U_\alpha \cup U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_{n_\alpha}} \right\}$$

принадлежащи на обектите, които са сравними с обекта U_α, т.е. принадлежащи на множеството Σ_α. Отначало с всеки обект

$$U_{\alpha_i} \in \Sigma_\alpha, \quad U_{\alpha_i} \neq U_\alpha$$

ще свържем число $y(U_\alpha, U_{\alpha_i})$ такова, че

$$y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) = 0 \qquad \text{ако } U_{\alpha_i} \cap U_\alpha = \varnothing \quad \text{и}$$

$$0 < y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) < 1 \qquad \text{ако } U_{\alpha_i} \cap U_\alpha \neq \varnothing.$$

Числото $y(U_\alpha, U_{\alpha_i})$ характеризира степента на еднакност на признаците и свойствата на обектите U_α и U_{α_i}. Ясно е, че $y(U_\alpha, U_{\alpha_i}) = y(U_{\alpha_i}, U_\alpha)$. Ще дефинираме $\Phi_\alpha(x)$:

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} \text{не е определена}, & \text{ако } x \notin \Xi_\alpha, \\ 1, & \text{ако } x \in \Xi_\alpha \text{ и } x \in U_\alpha, \\ p, & \text{ако } x \in \Xi_\alpha \text{ и } x \notin U_\alpha. \end{cases}$$

Нека $x \in U^1 \in \Xi_\alpha, \ldots, x \in U^m \in \Xi_\alpha$.

$$p \geq \max_{i=1,\ldots,m} y(U_\alpha, U^i).$$

Равенството $p = \max_{i=1,\ldots,m} y(U_\alpha, U^i)$ се достига когато

$$U^i \cap U_\alpha = \varnothing, \text{ за всички } i = 1, \ldots, m.$$

Обектите, определени чрез операциите $\neg A$, $A \cup B$ и $A \cap B$ ще дефинираме чрез задаване на X на функции на принадлежност, които им отговарят.

$\neg A$ може да се определи, задавайки на X функция на принадлежност $\Phi_{\neg A}(x)$, която е равна:

$$\Phi_{\neg A}(x) = 1 - \Phi_A(x), \qquad \text{ако} \quad x \in \Xi_\alpha,$$
$$\text{не е определена, ако} \quad x \notin \Xi_\alpha \qquad (3)$$

С $A \cup B$ ще свържем функция на принадлежност

$$\Phi_{A\cup B}(x) = 1, \qquad \text{ако } \Phi_A(x) + \Phi_B(x) > 1 \text{ и } x \in \Xi_A \cap \Xi_B,$$
$$= \Phi_A(x) + \Phi_B(x), \quad \text{ако } \Phi_A(x) + \Phi_B(x) \le 1 \text{ и } x \in \Xi_A \cap \Xi_B, \qquad (4)$$
$$\text{не е определена, ако } x \notin \Xi_A \cap \Xi_B.$$

С $A \cap B$ ще свържем функция на принадлежност

$$\Phi_{A\cap B}(x) = \Phi_A(x)\Phi_B(x), \qquad \text{ако} \quad x \in \Xi_A \cap \Xi_B, \qquad (5)$$
$$\text{не е определена, ако } x \notin \Xi_A \cap \Xi_B.$$

Функциите $\Phi_{A\cup B}(x)$ и $\Phi_{A\cap B}(x)$ могат да бъдат определени и посредством задаване на друго съответствие $\Xi_A \cap \Xi_B \Rightarrow [0,1]$.

В предложената формално-логическа структура в общия случай:

$A \cup \neg A \ne X$,

а множеството $X \setminus \Xi_A$ може да бъде интерпретирано като "нито A нито не A". Множеството от обекти Σ_A може да бъде интерпретирано како универсум от обекти по отношение на обекта A, и на него при функция на принадлежност, определена чрез гореопределения начин

$A \cup \neg A = \Sigma_A$.

В случая на друго определяне на функцията на принадлежност, това условие може и да не се изпълнява за всеки обект $A \in \hat{\Sigma}$.

Както и в теорията на "размитите" множества

$A \cap \neg A \ne \varnothing$,

а функцията на принадлежност $\Phi_{A\cap\neg A}(x)$ може да се получи чрез комбинация на функциите на принадлежност (3) и (5).

Всички U_α могат да зависят от някакви параметри. В частност, един от тях може да бъде времето.

Предложената логическа структура има конструктивен характер. На универсума X може и да не бъде зададена топология.

ЛИТЕРАТУРА

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. - М.: Мир, 1976, 167с.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981, 207с.